IDENTIFICATION OF SYSTEMS

Daniel Graupe

Colorado State University
Fort Collins

ROBERT E. KRIEGER PUBLISHING COMPANY
HUNTINGTON, NEW YORK
1976

Д. Гроп

Методы идентификации систем

Перевод с английского
канд. техн. наук **В. А. Васильева**
и канд. техн. наук **В. И. Лопатина**

под редакцией
д-ра техн. наук,
проф. **Е. И. Кринецкого**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1979

УДК 62.505

В этой небольшой по объему книге, выдержавшей в США два издания, рассмотрен широкий круг вопросов идентификации систем. Описаны различные методы идентификации: классические, регрессионные, основанные на методах стохастической аппроксимации, квазилинеаризации, инвариантного погружения и др. Книга отличается актуальностью и тщательно разработанной методикой изложения. Каждая глава содержит многочисленные задачи и примеры, иллюстрирующие рассматриваемые методы.

Книга может служить практическим руководством по методам идентификации для инженеров, а также с успехом использоваться преподавателями, аспирантами и студентами вузов в качестве пособия по курсам автоматического управления, идентификации и автоматизации экспериментальных исследований.

Редакция литературы по новой технике

1502000000

Г $\frac{30501-145}{041(01)-79}$ 145—79

Copyright © 1972 by Litton Educational Co., Inc.,
Transferred to Daniel Graupe July 1975
© Перевод на русский язык, «Мир», 1979

Предисловие редактора перевода

В последнее время в связи с предъявлением все более высоких требований к процессам управления в различных областях техники проблема идентификации становится исключительно важной. Нельзя обеспечить качественное управление системой, если ее математическая модель не известна с достаточной точностью. Для построения математической модели могут быть использованы как теоретические, так и экспериментальные методы. Опыт, накопленный при проектировании систем управления, убедительно свидетельствует о том, что нельзя построить математическую модель, адекватную реальной системе, только на основе теоретических исследований физических процессов в системе. Сформированная таким образом математическая модель, как правило, значительно отличается от реальной системы, что приводит соответственно к снижению качества управления. Поэтому в процессе проектирования систем управления одновременно с теоретическими исследованиями проводятся многочисленные эксперименты по определению и уточнению математической модели системы.

Эти эксперименты при разработке системы проводятся поэтапно. По мере развития процесса проектирования и накопления информации модель системы уточняется, и для ее идентификации на каждом этапе требуются соответствующие методы. В связи с этим становится актуальной задача выбора рационального метода идентификации.

Методы определения математических моделей по результатам экспериментальных исследований являются предметом теории идентификации. В зависимости от объема априорной информации о системе различают задачи идентификации в широком и узком смысле. При решении задач идентификации в широком смысле априорная информация о системе либо незначительна, либо вообще отсутствует. Система представляется в виде «черного ящика», и для ее идентификации необходимо решение ряда дополнительных задач, связанных с выбором класса модели, оценкой стационарности, линейности и др. Следует отметить, что в настоящее время теория идентификации в широком смысле не получила еще достаточного развития и находится в стадии становления.

При решении задачи идентификации в узком смысле считается, что известны структура системы и класс моделей, к которому она относится. Априорная информация о системе достаточно обширна. Такая постановка задачи идентификации наиболее соответствует реальным условиям проектирования и поэтому широко используется в инженерной практике. Теории и методам

идентификации в узком смысле посвящены многие работы в отечественной и зарубежной литературе. Предлагаемая читателю книга Д. Гропа также относится к этой области. Перевод сделан со второго дополненного издания книги, в котором учтены последние достижения в области идентификации систем. Первое издание этой книги, выпущенное в США в 1972 г., явилось полезным дополнением к книге А. Сейджа и Дж. Мелса, имеющейся в русском переводе (Идентификация систем. — М.: Наука, 1974).

В отличие от указанной выше работы А. Сейджа и Дж. Мелса в книге Д. Гропа рассмотрен более широкий класс различных методов идентификации, представлены новые результаты, полученные автором, и введена специальная глава о чувствительности характеристик систем к ошибкам идентификации. Исследование свойств методов, обусловленных различными формами задания идентификационных моделей, проведено автором на основе введенной классификации систем с единых методологических позиций, что значительно повышает практическую ценность книги.

Большое внимание автор уделил исследованию рекуррентных методов оперативной идентификации систем, не требующих обращения матриц и наиболее приспособленных для использования вычислительной техники.

Книга состоит из 14 глав, из которых первая представляет собой введение, а последняя содержит заключительные соображения по применению рассмотренных методов. Остальные 12 глав посвящены описанию различных методов идентификации. В первых главах книги (гл. 3—6) рассматриваются методы идентификации с использованием специальных пробных сигналов, применение которых ограничено областью линейных или линеаризованных стационарных систем. Гл. 7—9 посвящены описанию методов стохастической аппроксимации, квазилинеаризации и инвариантного погружения, пригодных для идентификации как линейных, так и нелинейных систем. В гл. 10—12 рассматриваются градиентные методы, методы случайного поиска и методы идентификации с прогнозом. Все главы построены по единой схеме: постановка задачи, краткое описание метода, пример использования, задачи, список литературы. Такое построение книги позволяет рассматривать различные методы идентификации независимо друг от друга, что значительно облегчает изучение материала.

Книга написана на основе прочитанных автором лекций, и это, естественно, наложило отпечаток на методику изложения. Сжатость текста, свойственная книге, в ряде случаев вызывает определенные затруднения при ее чтении. К сожалению, отсутствуют ссылки на советскую литературу, в которой ряд вопро-

сов получил более глубокое развитие (см., например, Я. З. Цыпкин. Адаптация и обучение в автоматических системах. — М.: Наука, 1968; Н. С. Райбман, В. М. Чадеев. Адаптивные модели в системах управления. — М.: Советское радио, 1966).

В то же время достаточно полное и систематическое изложение различных методов идентификации, иллюстрация их многочисленными примерами делают книгу удобной для изучения, что безусловно, является заслугой автора.

Все это дает основание полагать, что книга Д. Гропа окажется весьма полезной широкому кругу специалистов в различных областях науки и техники, практическая деятельность которых связана с использованием методов идентификации. Она может быть использована и как учебное пособие по курсу теории идентификации в высших учебных заведениях.

Кринецкий Е. И.

Предисловие ко второму изданию

Второе издание содержит некоторые новые результаты, касающиеся идентификации неустойчивых стохастических и детерминированных процессов (гл. 7), идентификации замкнутых стохастических систем (разд. 12.6), идентификации параметров с помощью фильтра Калмана (разд. 12.8) и анализа чувствительности (гл. 13). В этом издании устранены также опечатки и неточности первого издания. Я весьма обязан моим студентам и коллегам из Университета шт. Колорадо и читателям, указавшим на эти неточности и предложившим различные дополнения. Наконец, я приношу извинения читателям за возможные ошибки, которые остались в этом издании.

Даниэль Гроп

Июнь 1975

Предисловие

Литература, посвященная вопросам управления системами, включает большое число книг по синтезу регуляторов. Из этих книг можно узнать, что синтез регулятора зависит от характеристик системы, таких, как передаточные функции, переходные матрицы и т. п., каждая из которых требует прямой или косвенной идентификации, без которой эти характеристики обычно определить нельзя. Поэтому первоочередной задачей, которую необходимо решать на практике, является идентификация характеристик системы.

За последние годы в специальных журналах были опубликованы сотни статей по вопросам идентификации. Эти вопросы освещаются также и в большинстве книг по управлению. Однако в книгах вопросы идентификации рассматривают кратко, ограничиваясь одним или двумя методами, и им не уделяется такого внимания, как задачам синтеза регуляторов. Поэтому цель настоящей книги — дать работающим в промышленности инженерам-системотехникам и инженерам по управлению, а также студентам и аспирантам технических университетов пособие, специально посвященное вопросам идентификации.

Хочется надеяться, что эта книга хотя бы частично освободит читателя от необходимости изучать обширную литературу по данной теме. Таким образом, настоящая книга поможет читателю обоснованно подойти к выбору соответствующего метода идентификации при решении конкретной задачи и достаточно глубоко объяснить различные подходы и их сравнительные достоинства. Кроме того, в книге делается попытка выделить теоретические вопросы, а также аспекты, связанные с вычислениями и реализацией, которые могут возникнуть в различных методах и которые часто мешают успешной идентификации. В связи с этим в книге рассматриваются методы решения указанных задач путем соответствующего выбора алгоритмов идентификации, процедур их реализации и т. д. Даются также пояснительные примеры, задачи и их решения.

Однако не все задачи идентификации разрешимы в настоящее время. Эта книга не претендует на охват всех известных современных методов решения задач идентификации. Тем не менее делается попытка собрать все основные решения — от самых простых до более сложных и эффективных, объясняя их достоинства и обсуждая вопросы реализации.

Настоящая книга основана на курсе лекций, прочитанном автором в течение одного семестра в Технологическом институте г. Хайфы в 1968—1970 гг., а также курсе лекций в Ливерпульском университете и в Университете шт. Колорадо, США.

Предполагается, что читатель знаком с основными разделами математики и понятиями теории управления (классической теории линейной обратной связи), основами алгебры матриц и анализом устойчивости обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Поэтому настоящая книга предназначается для инженеров-системотехников и инженеров по управлению, а также студентов и аспирантов, специализирующихся в указанной области.

Книга не ограничивается идентификацией электрических, механических или химических процессов. Несмотря на то что каждому из таких процессов сопутствуют свои проблемы, связанные с аппаратурной реализацией, практические задачи идентификации в основном одинаковы для всех этих процессов.

Следовательно, методы решения задач идентификации отличаются только используемыми вычислительными средствами или математическими особенностями рассматриваемых характеристик, а не областями науки и техники, к которым принадлежат те или иные характеристики.

Необходимость в идентификации по входной и выходной информации не ограничивается только задачами системотехники и управления, а возникает почти во всех областях научной и практической деятельности, таких, как техника, физика, химия, биология, экономика, теория информации, обработка данных и т. д. Поэтому рассматриваемые методы идентификации, которые представляют собой только часть более обширной теории оценивания, могут быть использованы в любой области, где осуществляется динамическое моделирование по входной и выходной информации. Эти соображения распространяются также на методы индентификации с прогнозом, которые основаны на выходной информации.

Мне доставляет удовольствие выразить признательность за постоянную поддержку и полезные замечания д-ру Расселу Дж. Черчиллю, заведующему кафедрой электротехники Университета шт. Колорадо. Я глубоко признателен за помощь и советы многим коллегам по Университету. Особенно я обязан м-ру Даниэлю Дж. Краузе за его важные замечания и за решения нескольких примеров в данной книге, а также д-рам Ли. М. Максвеллу и Даниэлю Л. Алспачу за плодотворное обсуждение ряда вопросов. И наконец, я хочу поблагодарить м-с Дженис Утслер за ее терпение и аккуратность при печатании текста книги.

Даниэль Гроп

Февраль, 1972

1

Введение

1.1. Основные определения и классификация

Задачу идентификации характеристик системы можно рассматривать как дуальную (сопряженную) по отношению к задаче управления системой. Нельзя управлять системой, если она не идентифицирована либо заранее, либо в процессе управления. Например, мы не можем управлять автомобилем, пока не познакомимся с его реакцией на поворот руля, нажитие акселератора или тормоза, т. е. пока не ознакомимся со свойствами автомобиля. Этот процесс освоения автомобиля («привыкания» к нему) и представляет собой процесс идентификации. Таким образом, идентификацию реакции автомобиля мы осуществляем и в том случае, когда нам не известна система описывающих его дифференциальных уравнений. В общем случае, если необходимо перевести систему из состояния A в состояние B, то можно положиться либо на свое умение управлять системой, либо изучить реакции системы на одно или несколько управляющих воздействий. Если априори известно, что воздействие u_j переводит систему ближе к состоянию B, то следует прилагать именно это входное воздействие. В отсутствие такого априорного знания можно измерять реакции системы на ряд входных воздействий, выполняя таким образом по существу идентификацию. Знание результатов идентификации до начала процесса управления существенно влияет на его реализацию.

Выявление дифференциальных уравнений процесса представляет собой одну из возможных, но не единственную форму идентификации. Можно, например, составить таблицу возможных управляющих воздействий и соответствующих им откликов системы в заданном интервале времени. Из этой таблицы можно затем легко определить лучшие (с точки зрения преследуемой цели) процессы управления. Подобно этому могут быть сформированы идентификационные модели и на основании других методов описания процессов.

В настоящей книге рассматриваются различные методы идентификации, основанные на разных подходах к форме задания идентификационных моделей (например, дифференциальные уравнения, разностные уравнения, передаточные функции, градиентные выражения и т. п.).

Ни один из обсуждаемых методов идентификации не годится для идентификации всех видов систем. Каждый из них имеет свою область или области применения. Это, однако, не означает, что на современном уровне идентификация должна рассматриваться как набор готовых рецептов для различных типов систем. Сейчас уже можно говорить о теории идентификации, имеющей дело с оцениванием параметров на основании измеренных текущих входных и выходных данных, причем качество идентификации повышается с увеличением числа измерений. Ошибки идентификации, естественно, приводят к ошибкам в управлении или в требуемом выходном параметре системы; эти ошибки могут быть использованы для дальнейшего улучшения идентификации. Следовательно, теория идентификации аналогична, точнее, дуальна теории управления, в которой ошибки управления (в предположении, что система идентифицирована) используются для улучшения последующего процесса управления. Аналогично теории управления в теории идентификации существует несколько подходов, применяемых ко многим ситуациям и случаям.

Теория идентификации, которой посвящена настоящая книга, распространена на случай оценивания параметров устройств предсказания и фильтров. Это объясняется тесной взаимосвязью задач предсказания и идентификации, поскольку идентификация проводится обычно в целях облегчения предсказания поведения идентифицируемой системы в будущем. Однако задача предсказания отличается от задачи идентификации тем, что последняя для предсказания поведения в будущем рассматривает соотношения входов и выходов системы при заданных параметрах и входных воздействиях системы. Предсказание временны́х рядов основано на анализе измеренных значений, однако входные воздействия часто недоступны измерению и полностью неизвестны. Поэтому индентификация параметров устройств предсказания основана лишь на использовании предшествующих измерений сигналов, значения которых в будущем необходимо предсказать (и которые рассматриваются как выход системы, чей вход недоступен измерению), а воспользоваться данными о соотношениях входов и выходов нельзя.

Вообще говоря, различают несколько характерных ситуаций, для которых необходимы различные методы исследования. *Во-первых*, различают системы *линейные* и *нелинейные*, причем линейные системы легче идентифицировать, поскольку они обладают свойствами суперпозиции. *Во-вторых*, различают системы *стационарные* и *нестационарные* (к последним относятся системы с изменяющимися во времени параметрами). Системы могут считаться стационарными, если их параметры меняются медленно по сравнению со временем, которое требуется для точной

идентификации. *В-третьих*, системы часто делятся на *дискретные* и *непрерывные*, хотя преобразовать непрерывную формулировку задачи в дискретную обычно довольно просто. *Четвертый* вариант классификации различает методы идентификации для систем с *одним* или *несколькими* входными воздействиями. Это деление целесообразно вводить потому, что методы идентификации значительно упрощаются, если на систему подается лишь одно входное воздействие, по сравнению со случаем, когда на систему действует *одновременно* комбинация нескольких возмущений или входных воздействий. *Пятый* вариант классификации предусматривает возможность идентификации *детерминированных* или *стохастических процессов*. При идентификации последних ориентируются в основном на вероятностные представления о точном состоянии системы. (На практике все результаты измерений засорены шумом и для точной идентификации необходимо осуществить фильтрацию или сглаживание). При идентификации детерминированных систем обычно предполагается, что фильтрация уже была проведена. *Шестой*, и, возможно, наиболее важный, но трудно осуществимый, вариант классификации — классификация методов идентификации в зависимости от *наличия априорной информации* о системе. При классификации систем по признакам линейности или стационарности также используют априорную информацию. Эти признаки (линейность и стационарность), если они заранее неизвестны, конечно, могут быть установлены в процессе анализа результатов измерений. При любом методе идентификации очень важным является знание размерности вектора состояния и природы внутренних связей или нелинейностей.

В основу перечисленных способов классификации положена по существу степень сложности идентификации. Очевидно, идентифицировать детерминированный линейный стационарный процесс известного порядка с одним входом существенно проще, чем аналогичный стохастический процесс неизвестного порядка, который может быть нелинейным и нестационарным.

В следующих главах будут рассмотрены методы идентификации для всех упомянутых типов процессов, причем некоторые из этих методов применимы только к одному или нескольким типам, а другие — к большему числу типов процессов. Конечно, методы идентификации, для которых требуется меньше априорной информации (если априорная информация недостаточна), обладают меньшей точностью и скоростью сходимости при большей математической сложности и времени вычислений по сравнению с методами, использующими больший объем априорной информации. Аналогично методы, применяемые к нелинейным или нестационарным процессам, более сложны и зачастую менее точны, чем методы идентификации, рассчитанные на линейные

стационарные процессы. Подходы, основанные на использовании очень небольшой априорной информации, конечно, являются наиболее общими. Однако их применение к одномерным линейным процессам похоже на стрельбу из пушки по воробьям, т. е. оно неэффективно в отношении использования как оборудования, так и математического обеспечения. Поэтому в книге обсуждаются не только сложные методы, допускающие малую априорную информацию, но и более простые, область применения которых ограничена, скажем, линейными стационарными процессами. Возможны и иерархические процедуры, объединяющие несколько методов.

Подробное изложение методов идентификации в данной книге можно обобщить следующим образом.

В гл. 2 рассматриваются основные дуальные понятия управляемости и наблюдаемости; при этом полная наблюдаемость является необходимой предпосылкой для полной идентифицируемости модели состояния системы. Далее в гл. 2 рассмотрены способы построения моделей в пространстве состояний из передаточных функций и наоборот с целью облегчения распространения результатов, полученных для одной из этих форм представления, на другую.

В гл. 3 описывается метод идентификации с использованием специальных типов входных сигналов (ступенчатых, импульсных, синусоидальных), подаваемых на вход системы для решения задачи идентификации. Эти методы могут служить для неоперативной идентификации линейных стационарных процессов с одним входом или процессов с несколькими входами при условии, что в данный момент времени используется лишь один из них. При этом не требуется, чтобы порядок процессов был задан. Однако помехи должны быть отфильтрованы, особенно в случае применения ступенчатого и импульсного входного воздействия.

Поскольку теоретической основой методов, рассмотренных в третьей и четвертой главах, является преобразование Фурье, здесь же обсуждается его связь с задачей идентификации для любых сходящихся входных функций времени.

Гл. 4 также посвящена в основном вопросам идентификации с помощью специальных входных сигналов (белый, серый или псевдослучайный шум). Однако эти методы могут использоваться для идентификации в реальном времени, если амплитуда шума достаточно мала. Описанные в гл. 4 методы предназначены для линейных или линеаризованных процессов, которые можно идентифицировать при подаче одного входного сигнала в данный момент времени. Идентификация в реальном времени (в случае, когда она возможна) применима лишь к системам с одним входом.

В гл. 5 обсуждаются методы идентификации, основанные на методе наименьших квадратов, который обеспечивает получение среднеквадратических оценок параметров. Эти методы пригодны для нестационарных процессов с медленно (по сравнению с регрессией) меняющимися параметрами. Они применимы к линейным системам и обеспечивают идентификацию дискретных или непрерывных моделей в пространстве состояний или в виде передаточных функций. Далее, они могут использоваться для построения части модели вход — выход — шум, а также для оценки неизвестных параметров заданных нелинейных функций или полиномиальных аппроксимаций неизвестных нелинейных функций. Регрессионные методы позволяют проводить идентификацию при одновременных воздействиях на нескольких входах системы и, как показано в гл. 6, могут быть представлены в рекуррентной форме. Регрессионные алгоритмы идентификации объединяются в гл. 10 и 12 в более сложные процедуры идентификации. Знание размерности векторов состояния облегчает процесс идентификации, но не является обязательным условием. Показано, что априорное знание ковариаций шума можно использовать для получения оценок максимального правдоподобия по критерию минимума дисперсии для гауссовского шума. Таким образом, обсуждается связь между регрессионными оценками с минимальной среднеквадратической ошибкой и оценками по критерию максимального правдоподобия.

В гл. 6 дается последовательная формулировка методов наименьшей среднеквадратической регрессии из гл. 5 без применения процедур обращения матриц, что позволяет, таким образом, обойти возникающие вычислительные трудности. Это особенно важно для задач идентификации в реальном масштабе времени. Достигается быстрая сходимость к оценкам, полученным методами гл. 5, в силу эквивалентности подходов в этих двух главах.

В гл. 7, так же как и в гл. 6, рассматриваются последовательные методы идентификации. Эти методы также применимы для линейных процессов и для оценивания неизвестных параметров заданных нелинейных функций (описывающих или аппроксимирующих нелинейные процессы), но могут иметь несколько более длительную сходимость, чем последовательная регрессия. В первой части гл. 7 описывается подход к идентификации методом стохастической аппроксимации. Этот подход обладает лучшей сходимостью, поскольку сходимость гарантируется, если выполняются весьма слабые условия. Этот подход дает простые с вычислительной точки зрения оценки параметров, сходящиеся к действительному среднему значению по градиенту квадратической ошибки оценивания, в отличие от регрессионного подхо-

да, при котором каждая оценка обладает свойствами оптимальности в среднеквадратическом смысле.

Вторая часть гл. 7 посвящена методу обучения Нагумо и Нода [1]. Метод позволяет реализовать последовательную идентификацию, отличающуюся от метода стохастической аппроксимации в основном свойствами сходимости и применимостью к системам с медленно изменяющейся нестационарностью. Этот подход обладает привлекательными вычислительными свойствами. Его вариант для нестационарных систем требует, как и в гл. 4, специальных не зашумленных входов, но позволяет проводить вычисления намного быстрее.

В гл. 8 рассматривается итеративный подход к задаче идентификации, основанный на использовании фиксированного, а не последовательно растущего числа измерений. Он применим как к линейным, так и к нелинейным процессам. При этом для целей идентификации могут оказаться достаточными только несколько состояний в различные моменты времени. Однако предполагаются известными размерность вектора параметров, а также некоторая априорная информация об области возможных значений идентифицируемых параметров. В тех случаях, когда необходимо идентифицировать параметры нелинейных систем, должна быть задана либо нелинейная функция, либо полиномиальная аппроксимация, поскольку любой метод позволяет идентифицировать лишь параметры функций заданного вида.

Гл. 9 содержит описание метода последовательной идентификации, применимого как к линейным, так и к нелинейным системам и базирующегося на решении во временной области дифференциальных уравнений, вынуждающими функциями для которых являются записи временных зависимостей измерений.

Подход, рассмотренный в гл. 9, для случая систем со многими параметрами очень громоздок. Однако он не требует фильтрации шумов измерений и может обеспечить оценивание (в оптимальном смысле) и координат состояния, и параметров. При этом предполагаются известными размерности вектора состояний и вектора параметров. Приближенного знания области возможных значений величин идентифицируемых параметров достаточно для гарантии хорошей сходимости (хотя здесь это менее существенно, чем в случаях гл. 8). Кроме того, показано, что для достижения сходимости крайне важно в процессе идентификации иметь некоторую априорную информацию о весовых коэффициентах и о порядке величин начальных условий системы дифференциальных уравнений.

В гл. 10 описаны методы идентификации с прогнозированием, пригодные как для линейных, так и для нелинейных систем. Первый метод этой главы в основном применим к системам с медленно меняющимися во времени параметрами и с одним и

многими входами. Представленный во второй части гл. 10 градиентный метод с прогнозированием обеспечивает идентификацию функциональной связи между характеристиками управления и вектором управления, что очень важно в случае, когда требуется обеспечить точное управление.

Последний метод, однако, не идентифицирует зависимости управления от переменных состояния. Он также применим к нелинейным процессам, которые могут быть линеаризованы относительно малых возмущений, и облегчает требуемое управление этими системами. Методы гл. 10 предполагают сглаживание шума измерений.

В гл. 11 обсуждается ряд эвристических методов идентификации, основанных на некоторых оценках скалярных функций качества, характеризующих рассогласование между поведением реальной системы и соответствующим поведением системы с параметрами, равными их оценкам. Идентифицированные до этого параметры корректируются, и качество идентификации оценивается заново до тех пор, пока не будет обеспечена удовлетворительная величина ошибки. Применимость методов не ограничена линейностью, стационарностью или числом входов системы. Однако они очень громоздки и медленны для процессов в системах с многими входами, если их не объединить с методами, представленными в гл. 10.

Гл. 12 посвящена аспектам предсказания и идентификации параметров предсказателей и временных рядов, если они не заданы заранее. Эти методы идентификации применяются для облегчения совместного оценивания параметров и состояния линейных процессов. Методы предсказания гл. 12 применимы к задачам предсказания гл. 10, но могут служить для идентификации параметров предсказателя в общем случае, когда сигнал заранее не известен. Идентификация параметров предсказателя основана только на предыстории сигнала или выхода системы, так как в этом случае неизвестно входное воздействие (предполагается, что сигналом является соответствующий этому воздействию выход). Следовательно, параметры модели в пространстве состояний получаются для случаев, когда требуется предсказание вектора состояния сигнала, как в фильтре Калмана, или же строится смешанная усредненная авторегрессионная модель [2], осуществляющая предсказание на основании восстановления входного воздействия; обсуждается распространение этой модели на случай нестационарных последовательностей и систем, описанных в терминах вход — выход.

Последняя модель может быть преобразована для построения модели в пространстве состояний с целью дальнейшего оптимального предсказания состояния гауссовских последовательностей с помощью метода калмановской фильтрации, описанного

в гл. 12. Она распространяется на негауссовские случаи и может быть также включена в схему идентификации входного и выходного шумов, обсужденную в разд. 5.4.

В гл. 13 исследуется влияние ошибок идентификации линейных систем на качество управления. Это делается с целью выявления параметров, для которых ошибки идентификации будут приводить к большим отклонениям действительного качества управления от ожидаемого в случае, если управление формируется на основе результатов идентификации. В итоге удается установить, где необходима точная идентификация, а где достаточно весьма приближенной идентификации, когда речь идет о качестве управления.

Отметим, что идентификация динамических параметров на основании измерений возможна только в случае, когда измерения выполнены в период переходного состояния системы, поскольку никакими методами невозможно идентифицировать динамические параметры системы, находящейся в установившемся режиме. Еще раз подчеркнем, что при идентификации параметров нелинейных систем последние должны принадлежать к заранее заданному виду, так как параметр, наилучшим образом описывающий систему при одной форме представления, оказывается совершенно неудовлетворительным при другом описании системы.

В гл. 14 дается краткая сравнительная оценка методов, описанных в предыдущих главах.

1.2. Математический аппарат

Анализ, проводимый в гл. 2—14, предполагает использование некоторого математического аппарата, который более или менее обычен для студентов младших курсов электротехнических, механических, химических или аэрокосмических факультетов технических университетов, а также математических или физических факультетов. Этот аппарат, если он забыт или недостаточно хорошо усвоен, можно найти почти в любом учебнике для инженеров-системотехников или в книгах по теории управления, таких, как [3—5].

Предполагается, в частности, что читатель знаком с основами матричной алгебры, с такими действиями, как сложение, вычитание, умножение, обращение ($\mathbf{A}^{-1}$) и транспонирование ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$) матриц, вычисление детерминантов матриц, с понятиями миноров и рангов матриц. Все это обсуждается в литературе [3—5] и в первых главах любого вузовского учебника по теории матриц (например, [6]).

Далее, предполагается, что читатель хорошо знаком с основной терминологией математической статистики [7], с понятием

передаточных функций в форме преобразований Лапласа, с алгеброй блок-схем, с фундаментальными понятиями характеристических уравнений и их корней, со свойствами устойчивости, определенными по вещественным частям этих корней, что обсуждается в первых главах книг [3—5] или в любом учебнике по теории управления или анализу систем.

Владея этим математическим аппаратом, достаточным для инженера-исследователя или специалиста по прикладной математике в любой области техники, можно приступить к анализу задач идентификации, рассматриваемых в последующих главах данной книги.

1.3. Комментарии к библиографии

Поскольку идентификация является существенным моментом в процессе любого управления, первые работы по идентификации так же стары, как и по управлению, о чем свидетельствуют основополагающие работы Найквиста [8] и Боде [9] по частотным свойствам, в которых описываются по существу методы идентификации. В этих работах показано, как получить частотную характеристику по измерениям входа и выхода и как эта характеристика связана с характеристическим уравнением системы и его корнями. В фундаментальных работах Зиглера и Никольса [10] рассматриваются методы идентификации с помощью ступенчатого воздействия. Литература по идентификации значительно обогатилась достижениями в теории адаптивного и оптимального управления в течение 50—60-х годов. Появились важные обзорные статьи, такие, как Си [11], в 1965 г., Эйкхоффа и др. [12] на конгрессе ИФАК (Международная федерация по автоматическому управлению) в 1965 г., Эйкхоффа [13], Кьюнода и Сейджа [14] на симпозиуме ИФАК по идентификации, состоявшемся в 1967 г.

Среди книг по идентификации следует упомянуть работу Р. Ли [15], рассмотревшего важные вопросы управления и последовательного оценивания состояния и параметров, книгу Мишкина и Брауна [16] по адаптивному управлению и книгу Сейджа [17], посвященную важным разделам идентификации и оценивания параметров.

Монографии Дойча [18] и Ван Триса [19] в основном посвящены оцениванию состояния. Однако многие из методов, обсуждаемых в работах [18] и [19], применимы к последовательной идентификации параметров и представляют огромную ценность для специалистов, работающих в этой области. Такое же значение имеют книги Менделя и Фу [20], в которой две главы посвящены стохастической аппроксимации и градиентной идентификации, Бокса и Дженкинса [2], где в основном рассматривается

идентификация смешанных авторегрессионных моделей, Ли, Адамса и Гейнза [21], в которой подробно обсуждаются непоследовательные регрессионные методы, а также книга Сейджа и Мелса [22].

Отметим, что здесь мы не пытаемся дать исчерпывающий обзор, список или классификацию обширной литературы, имеющейся в этой области. В данной библиографии указано лишь несколько важных работ по идентификации, так как в большинстве книг по теории систем или управления отдельные главы или разделы посвящены вопросам идентификации, а каждый журнал или конференция по управлению содержат статьи, относящиеся к этому вопросу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nagumo J., Noda A., A Learning Method for System Identification, *IEEE Trans.*, AC-12, pp. 282—287 (1967).
2. Box G. E. P., Jenkins G. M., Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco, 1970. [Русский перевод: Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. — М.: Мир, 1974.]
3. Elgerd O. I., Control System Theory, McGraw-Hill, New York, 1967.
4. Ogata K., State Space Analysis of Control Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.
5. Perkins W. R., Cruz J. B., Engineering of Dynamic Systems, Wiley, New York, 1969.
6. Ayres F., Matrices, Schaum, New York, 1962.
7. Sokolnikoff I. S., Redheffer R. M., Mathematics of Physics and Modern Engineering, McGraw-Hill, New York, 1966.
8. Nyquist H., Regeneration Theory, *Bell Sys. Jour.*, **11**, pp. 126—147 (1932).
9. Bode H. W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrand Reinhold, New York, 1945.
10. Ziegler J. G., Nichols N. B., Process Lags in Automatic Control Circuits, *Trans. ASME*, **64**, p. 759 (1952).
11. Hsieh H. C., Synthesis of Adaptive Control Systems by Function Space Methods, in Advances in Control Systems, Vol. 2 (edited by C. T. Leondes), Academic Press, New York, 1965.
12. Eykhoff P., Van der Grinten P. M. E. M., Kwakernaak H., Veltman B. P. T., Systems Modelling and Identification, Survey Paper, Proc. of 3rd IFAC Congress, London, 1966.
13. Eykhoff P., Process Parameter and State Estimation, Survey Paper 2, Proc. of IFAC Symposium on Identification, Prague, 1967.
14. Cuenod M., Sage A. P., Comparison of Some Methods Used for Identification, Survey Paper 1, Proc. of IFAC Symposium on Identification, Prague, 1967.
15. Lee R. C. K., Optimal Estimation, Identification and Control, MIT Press, Cambridge, Mass., 1964. [Русский перевод: Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. — М.: Наука, 1966.]
16. Mishkin E., Braun L., Adaptive Control Systems, McGraw-Hill, New York, 1961. [Русский перевод: Мишкин Э., Браун Л. Приспосабливающиеся автоматические системы. — М.: Мир, 1963.]
17. Sage A. P., Optimum Systems Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968.
18. Deutsch R., Estimation Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
19. Van Trees H. L., Detection, Estimation and Modulation Theory, Wiley, New

York, 1968. [Русский перевод: Ван Трис. Теория обнаружения оценок и модуляции. — М.: Советское радио, 1972.]
20. Mendel J. M., Fu K. S. (editors), Adaptive, Learning and Pattern Recognition Systems, Academic Press, New York, 1970.
21. Lee T. H., Adams G. E., Gaines W. M., Computer Process Control Modeling and Optimization, Wiley, New York, 1968.
22. Sage A. P., Melsa J. L., System Identification, Academic Press, N. Y., 1971. [Русский перевод: Сейдж А., Мелса Дж. Идентификация систем. — М.: Наука, 1974.]

2

Пространство состояний, управляемость и наблюдаемость

2.1. Понятие пространства состояний

Динамические системы могут быть описаны системами обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных либо разностных уравнений на детерминистской или стохастической основе. Динамические свойства систем в этих уравнениях определяются производными по времени или соответствующими им разностными выражениями. Системы, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных, могут быть аппроксимированы обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые содержат только производные по времени.

Любое из обыкновенных дифференциальных уравнений порядка r можно преобразовать в систему дифференциальных уравнений первого порядка. Система из n дифференциальных уравнений первого порядка определена полностью лишь в том случае, когда заданы все коэффициенты и известны n начальных условий. Начальные условия образуют n-мерный вектор, который полностью (и точно) определяет состояние системы, описываемой названными уравнениями, в начальный момент времени t_0 (предполагается, что все входные или возмущающие воздействия известны с момента t_0 и далее). Указанный вектор называется *вектором состояния* системы в момент времени t_0, а его компоненты называются *переменными состояния*. Полученное в результате векторное дифференциальное уравнение является уравнением состояния динамической системы.

2.2. Линейные преобразования

Вектор состояния может быть образован различными комбинациями n переменных состояния. Определить их можно в результате следующих преобразований.

Рассмотрим линейную систему, описываемую следующим векторным уравнением состояния:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x} = n \times 1$ — вектор состояния; $\mathbf{u} = m \times 1$ — вектор возмущающих воздействий, или входной вектор, компоненты которого мо-

гут быть независимыми функциями времени; **A**, **B** — матрицы коэффициентов.

Для того чтобы построить вектор состояния различными способами, можно использовать линейное преобразование уравнения (2.1). Преобразованный вектор состояния $\mathbf{x}^*$ является линейной комбинацией n компонент вектора $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^* = \psi^{-1}\mathbf{x}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{x}^*$ — преобразованный вектор состояния, ψ — матрица преобразования.

Уравнение (2.2) порождает новое уравнение состояния

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^* + \mathbf{B}^*\mathbf{u}, \tag{2.3}$$

которое удовлетворяется при

$$\mathbf{A}^* = \psi^{-1}\mathbf{A}\psi, \tag{2.4а}$$

$$\mathbf{B}^* = \psi^{-1}\mathbf{B}\psi. \tag{2.4б}$$

Указанное преобразование возможно только в том случае, когда существует матрица ψ^{-1}. Заметим, что ни одна преобразованная переменная не может рассматриваться как переменная состояния, если она является линейной комбинацией одной или нескольких других переменных состояния.

С этой точки зрения интересно отметить, что собственные значения исходного уравнения (2.1) совпадают с собственными значениями преобразованного уравнения (2.2), поскольку они представляют собой решение характеристического уравнения [1]

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.5}$$

где λ_i — i-е собственное значение матрицы **A**. Заметив, что $\det(\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}) = \det(\mathbf{G})\cdot\det(\mathbf{H})$, получим для преобразованной системы уравнения (2.2):

$$\det(\mathbf{A}^* - \lambda_i^*\mathbf{I}) = \det(\psi^{-1}\mathbf{A}\psi - \lambda_i^*\mathbf{I}) = \det(\psi^{-1}\mathbf{A}\psi - \lambda_i^*\psi^{-1}\mathbf{I}\psi) =$$

$$= \det(\psi^{-1})\det(\mathbf{A} - \lambda_i^*\mathbf{I})\det(\psi) = 0. \tag{2.6}$$

Помимо этого (поскольку $\det\psi \neq 0$, если матрица ψ^{-1} существует), получим

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i^*\mathbf{I}) = 0. \tag{2.7}$$

Следовательно, матрица **A** удовлетворяет как уравнению (2.5), так и уравнению (2.7), поэтому для соответствующих индексов i получим

$$\lambda_i^* = \lambda_i. \tag{2.8}$$

Пример 2.1

Собственные значения системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

определяются из уравнения

$$\det(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})=0=\det\begin{bmatrix}3-\lambda_i & 2\\ 1 & 4-\lambda_i\end{bmatrix}=$$
$$=(3-\lambda_i)(4-\lambda_i)-2=\lambda_i^2-7\lambda_i+10$$

в следующем виде:

$$\lambda_i=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2},$$

т. е. $\lambda_1=5$, $\lambda_2=2$.

Преобразуем исходную систему с помощью матрицы $\psi=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, тогда

$$\dot{\mathbf{x}}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{x}^*,$$

где в соответствии с выражением (2.4)

$$\mathbf{A}^*=\psi^{-1}\mathbf{A}\psi=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0{,}5 & 4\end{bmatrix}.$$

Собственные значения $\mathbf{A}^*$ в этом случае определяются из

$$\det(\mathbf{A}^*-\lambda_i^*\mathbf{I})=0=\det\begin{bmatrix}3-\lambda_i^* & 4\\ 0{,}5 & 4-\lambda_i^*\end{bmatrix}=(3-\lambda_i^*)(4-\lambda_i^*)-2$$

и будут равны найденным выше для матрицы $\mathbf{A}$.

2.2.1. Каноническое преобразование

Среди множества различных линейных преобразований уравнения (2.1) одно, как будет показано ниже, играет особенно важную роль. Это так называемое каноническое преобразование, в котором матрицей преобразования является матрица собственных векторов $\mathbf{V}$. Эта матрица получается из решения однородного линейного уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0. \tag{2.9}$$

Решение имеет вид

$$\begin{aligned}x_1(t)&=v_{11}\exp(\lambda_1 t)+\ldots+v_{1n}\exp(\lambda_n t),\\ &\vdots\\ x_n(t)&=v_{n1}\exp(\lambda_1 t)+\ldots+v_{nn}\exp(\lambda_n t),\end{aligned} \tag{2.10а}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{V}\exp(\lambda t)=\mathbf{v}_1\exp(\lambda_1 t)+\ldots+\mathbf{v}_n\exp(\lambda_n t), \tag{2.10б}$$

где

$$\exp(\lambda t) \triangleq \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

и

$$\mathbf{V} \triangleq \begin{bmatrix} v_{11} \dots v_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{1n} \dots v_{nn} \end{bmatrix} = [\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_n]. \tag{2.12}$$

Тогда для определения $\mathbf{V}$ нужно найти собственные векторы $\mathbf{v}_i$.

2.2.1а. Прямое определение собственных векторов. Дифференцирование уравнения (2.10) по t дает

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \exp(\lambda_1 t) + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \exp(\lambda_n t). \tag{2.13}$$

Подставляя $\mathbf{x}$ из уравнения (2.10) в (2.9), получаем

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{AV} \exp(\lambda t) = \mathbf{A}[\mathbf{v}_1 \exp(\lambda_1 t) + \dots + \mathbf{v}_n \exp(\lambda_n t)]. \tag{2.14}$$

Сравнивая уравнения (2.13) и (2.14), находим, что собственные векторы $\mathbf{v}_i$ удовлетворяют (для случая, когда все λ_i различны) соотношению

$$\lambda_i \mathbf{v}_i \exp(\lambda_i t) = \mathbf{A}\mathbf{v}_i \exp(\lambda_i t), \tag{2.15}$$

и, поделив обе части уравнения (2.15) на $\exp(\lambda_i t)$, получим

$$\lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i, \tag{2.16а}$$

или

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = 0. \tag{2.16б}$$

Следовательно, $\mathbf{v}_i$ может быть определен из уравнения (2.16).

Для получения собственных значений векторов $\mathbf{v}_i$ необходимо определить значение одного элемента $\mathbf{v}_i$, например первого, который можно положить равным единице. Поэтому последнюю строку в матричном уравнении (2.16б) при вычислении $\mathbf{v}_i$ можно опустить, как показано в следующем примере.

Пример 2.2

Рассмотрим матрицу $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Для определения собственных векторов $\mathbf{v}_i$ сначала вычислим собственные значения матрицы $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda_i^2 - 4\lambda_i - 5 = 0,$$

откуда получаем $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. Далее, согласно уравнению (2.16), запишем

$$-\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -v_{11} \\ -v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} + 2v_{12} \\ 4v_{11} + 3v_{12} \end{bmatrix}$$

и находим

$$-2v_{11} = 2v_{12},$$
$$-4v_{11} = 4v_{12},$$

или

$$v_{11} = -v_{12}.$$

Полагая $v_{11} = 1$, получаем

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично в соответствии с уравнением (2.16)

$$5\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \cdot v_{21} \\ 5 \cdot v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{21} + 2v_{22} \\ 4v_{21} + 3v_{22} \end{bmatrix},$$

что дает

$$4v_{21} = 2v_{22},$$
$$2v_{22} = 4v_{21},$$

или

$$2v_{21} = v_{22}.$$

Полагая $v_{21} = 1$, получим

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.2.1б. Другие алгоритмы определения собственных векторов. Более быстрая последовательная процедура определения собственных векторов $n \times n$-мерной матрицы $\mathbf{A}$ основана на методе Крылова [2]. При этом подходе предполагается также, что собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\mathbf{A}$ уже определены и можно воспользоваться характеристическим уравнением $\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0$. Этот метод применим к матрицам с различными и одинаковыми собственными значениями. Последовательность применения метода следующая.

Определяя коэффициенты c_i, такие, что

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = (-1)^n(\lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - c_0), \tag{2.17}$$

и произвольно выбирая начальный n-мерный вектор $\mathbf{d}_1$, например, для $n=2$:

$$\mathbf{d}_1 = [1,\ 0]^T, \tag{2.18а}$$

образуем векторы

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{A}\mathbf{d}_1,\ \mathbf{d}_3 = \mathbf{A}\mathbf{d}_2,\ \ldots,\ \mathbf{d}_n = \mathbf{A}\mathbf{d}_{n-1}. \tag{2.18б}$$

Далее определяем элементы i-го собственного вектора $\mathbf{v}_i$ в виде

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\,\mathbf{d}_{n-k+1}, \tag{2.19}$$

где

$$p_{i1} = 1, \tag{2.20а}$$

$$p_{i,j} = \lambda_i p_{i,j-1} - c_{n-j+1},\quad j = 2,\ \ldots,\ n, \tag{2.20б}$$

$$0 = \lambda_i p_{in} - c_0. \tag{2.20в}$$

Уравнение (2.20в) служит только для проверки вычислений.

Если матрица $\mathbf{A}$ представлена в *коагулированной* форме

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \mathbf{I} \\ \hline \alpha_1 \mid \cdots \alpha_n & \end{array}\right],$$

то можно построить очень быстрый алгоритм вычисления собственного вектора матрицы $\mathbf{V}$ с использованием матрицы Вандермонда следующим образом:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Отметим, что $\mathbf{V}^{-1}$ существует только в том случае, если все λ_i различны.

Пример 2.3

Применяя метод Крылова к примеру 2.2, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\quad \lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = 5,\quad n = 2,$$

определим собственные векторы матрицы **A** следующим образом. Произвольно выбираем

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

для определения

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{A}\mathbf{d}_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

С учетом уравнения (2.17) c_i принимает вид

$$\lambda_i^2 - 4\lambda_i - 5 = \lambda^n - c_1\lambda - c_0,$$

откуда получаем

$$c_1 = 4, \quad c_0 = 5.$$

Далее, уравнение (2.20) дает

$$p_{11} = 1, \quad p_{12} = -1 \cdot p_{11} - c_1 = -1 - 4 = -5,$$
$$p_{21} = 1, \quad p_{22} = 5 \cdot p_{21} - c_1 = 5 - 4 = 1.$$

Таким образом, собственные векторы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ равны

$$\mathbf{v}_1 = p_{11}\,\mathbf{d}_2 + p_{12}\,\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2 = p_{21}\,\mathbf{d}_2 + p_{22}\,\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Далее, нормализуя $\mathbf{v}_i$ так, чтобы первый элемент равнялся 1, получаем

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

как и в примере 2.2.

2.2.1в. Процедура диагонализации. Для рассмотрения других способов получения **V** определим теперь диагональную матрицу Λ следующим образом:

$$\mathbf{\Lambda} \triangleq \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{2.22}$$

Следовательно,

$$\mathbf{V\Lambda} = [\lambda_1 \mathbf{v}_1, \ldots, \lambda_n \mathbf{v}_n]. \tag{2.23}$$

Принимая во внимание уравнение (2.16), запишем

$$\mathbf{V\Lambda} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{AV}, \tag{2.24а}$$

или

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV}. \tag{2.24б}$$

Таким образом, диагонализация матрицы **A** осуществляется, если ее собственные значения различны. Применяя каноническое преобразование к уравнению (2.1), т. е. используя **V** как матрицу преобразования и учитывая уравнения (2.4), получим следующее каноническое уравнение состояния:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{\Lambda x}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{u}, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{B}_1, \tag{2.25а}$$

или в скалярной форме

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^* &= \lambda_1 x_1^* + b_{11}^* u_1 + \ldots + b_{1m}^* u_m, \\
\dot{x}_2^* &= \lambda_2 x_2^* + b_{21}^* u_1 + \ldots + b_{2m}^* u_m, \\
&\vdots \\
\dot{x}_n^* &= \lambda_n x_n^* + b_{n1}^* u_1 + \cdots + b_{nm}^* u_m.
\end{aligned} \tag{2.25б}$$

Следовательно, каноническое преобразование приводит к системе уравнений состояния, в которой *каждая производная (канонической) переменной состояния зависит только от соответствующей (канонической) переменной состояния* и от входных сигналов.

Пример 2.4

Рассмотрим диагонализацию уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \text{где} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

как в примере 2.2, а $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Каноническое преобразование матрицы **A** выполняется, согласно уравнению (2.24), следующим образом:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{AV}.$$

В примере 2.2 было получено

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

и

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Из примера 2.2 известно, что $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. Поэтому диагональная матрица Λ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

2.3. Управляемость

Понятие наблюдаемости и дуальное ему понятие управляемости были впервые введены Калманом [3] в 1960 г. Хотя при обсуждении методов идентификации понятие наблюдаемости важнее понятия управляемости, оба они ввиду их дуальности рассматриваются совместно.

Говорят, что система является управляемой, если она может быть переведена из любого состояния $\mathbf{x}(t_0)$ при $t = t_0$ в любое другое желаемое состояние $\mathbf{x}(t_1)$ за конечный интервал времени $\tau (\tau = t_1 - t_0)$ путем приложения кусочно-непрерывного входного воздействия $\mathbf{u}(t)$, $t \in (t_0, t_1)$.

Понятие управляемости можно проиллюстрировать схемой рис. 2.1. Видно, что эта система является неуправляемой, так как управляющее входное воздействие $\mathbf{u}(t)$ влияет *не на все* переменные состояния.

Кроме того, управляемая замкнутая линейная система может иметь произвольные собственные значения независимо от собственных значений соответствующей разомкнутой системы. Это свойство детально рассмотрено Вонхэмом [4].

В литературе описаны критерии анализа управляемости (и соответственно наблюдаемости) систем. Все они основаны на рассмотрении канонического уравнения состояния и на полиномиальном разложении $e^{\mathbf{A}t}$ [3, 5] (см. также работы [6—9]).

2.3.1. Критерий управляемости для канонических систем

Опишем сначала критерий Гильберта [5] (см. также [10]) для исследования управляемости линейной системы, представленной в канонической форме. Этот метод подразумевает, что система сначала должна быть приведена к канонической форме согласно уравнениям (2.25). Эта форма удобна тем, что в ней

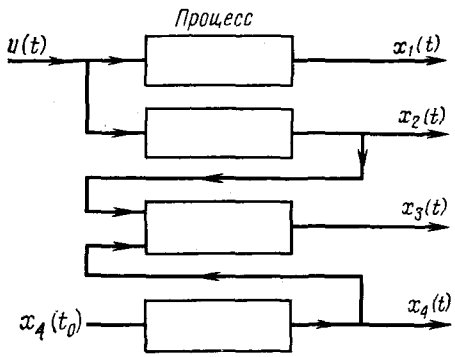


Рис. 2.1. Неуправляемая система.

отсутствует взаимосвязь между каноническими переменными состояния. В соответствии с критерием Гильберта *система, заданная в канонической форме*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda x}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{u}, \tag{2.26}$$

управляема, если ни одна из строк матрицы $\mathbf{B}^*$ не является нулевой (т. е. для управляемости в каждой строке должен быть по меньшей мере один ненулевой элемент $\mathbf{B}$). *Следовательно, если хотя бы одна строка матрицы* $\mathbf{B}$ *является нулевой, система* ***неуправляема.*** В разд. 2.2 было показано, что каноническая форма уравнения (2.25) пригодна только для случаев, когда $n \times n$-матрица $\mathbf{A}$ исходной системы имеет n *различных* собственных значений. Ниже мы рассмотрим каноническое преобразование Жордана [6], позволяющее частично преодолеть это ограничение.

Теорема об управляемости доказывается следующим образом. Рассмотрим прежде всего утверждение о том, что если одна или более строк матрицы $\mathbf{B}^*$ нулевая, то система неуправляема. Для этого перепишем уравнение (2.25) в скалярной форме

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^* &= \lambda_1 x_1^* + \sum_{j=1}^{m} b_{1j}^* u_j, \\
\dot{x}_2^* &= \lambda_2 x_2^* + \sum_{j=1}^{m} b_{2j}^* u_j, \\
&\vdots \\
\dot{x}_n^* &= \lambda_n x_n^* + \sum_{j=1}^{m} b_{nj}^* u_j.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Поскольку взаимодействие между каноническими переменными состояния отсутствует, становится очевидным, что если в любой i-й строке уравнения (2.26) $b^*_{ij}=0$, $\forall j$, то на соответствующую переменную состояния x^*_i не может повлиять выбор управления. Следовательно, это состояние системы неуправляемо. Однако если ни одна из строк $\mathbf{B}^*$ не равна нулю, то можно доказать, что любое состояние $x^*(t_0)$ может быть переведено в любое новое состояние $x^*_i(t_1)$. Доказательство строится на основе рассмотрения решения уравнения (2.26), задаваемого выражением

$$x^*_i(t_1)=e^{\lambda_i(t_1-t_0)}x^*_i(t_0)+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t_1}e^{\lambda_i(t_1-\tau)}b^*_{ij}u_j(\tau)\,d\tau,\quad \forall i=1,\ \ldots,\ n. \tag{2.28}$$

Всегда можно так определить $x^*_i(t_0)\triangleq 0$, $t_0\triangleq 0$, чтобы получить

$$x^*_i(t_1)=\sum_j e^{\lambda_i t_1}\int_0^{t_1}e^{-\lambda_i\tau}b^*_{ij}u_j(\tau)\,d\tau,\ \forall i=1,\ \ldots,\ n. \tag{2.29}$$

Рассмотрим случай, когда имеется n входов u_1, ..., u_n (n — число состояний). Следовательно, уравнение (2.28) показывает, что если все строки в $\mathbf{B}^*$ линейно независимы, то можно потребовать, чтобы управление u_j ($\forall j=1$, ..., n) было постоянным внутри интервала интегрирования, и решать n уравнений с n неизвестными u_j, чтобы удовлетворить n произвольным различным $x^*_i(t_1)$. Положение осложняется, если имеется лишь один вход. В этом случае уравнение (2.28) принимает вид

$$x^*_i(t_1)=e^{\lambda_i t_1}\int_0^{t_1}e^{-\lambda_i\tau}b^*_i u(\tau)\,d\tau,\ \forall i. \tag{2.30}$$

Однако любой конечный интервал t_1—t_0 может быть разделен на n подынтервалов (t_{11}—t_0), (t_{21}—t_{11}), ..., (t_{n1}—t_{n+1}), где $t_{n1}=t_1$. Следовательно, интеграл уравнения (2.29) превращается в сумму n интегралов на n подынтервалах. Очевидно, $u(\tau)$ может принять на этих подынтервалах n различных значений, которые могут быть постоянными внутри каждого подынтервала. Поэтому мы получаем n однотипных уравнений с n неизвестными (значениями u на каждом подынтервале), которые должны удовлетворять n произвольным значениям для $x^*_i(t_1)$, $\forall i=1$, ..., n. Последний критерий управляемости для одного входа справедлив и для систем со многими входами, поскольку если система имеет несколько входов и ни одна из строк матрицы $\mathbf{B}^*$ не нулевая, то можно сделать все выходы равными или взаимосвязанными так, что система превратится в систему с одним входом.

Пример 2.5

Рассмотрим систему $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$, где $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, как в примере 2.2, а $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$. В соответствии с примером 2.2 матрица преобразования для диагонализации $\mathbf{A}$ задается соотношением

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix},$$

причем

$$\mathbf{V}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}.$$

В соответствии с уравнением (2.25)

$$\mathbf{B}^{*}=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

что дает диагонализированную (каноническую) систему

$$\dot{x}_1^{*}=-x_1^{*}, \qquad \dot{x}_2^{*}=5x_2^{*}+u.$$

Так как на состояние x_1^{*} не влияет входной сигнал управления, то система, очевидно, неуправляема.

1.3.1а. Случай неопределенных собственных значений. Когда не все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ различны, нельзя провести каноническую диагонализацию $\mathbf{A}$. В этом случае она может быть преобразована к *канонической жордановой форме* [11] вида

$$\mathbf{J}=\left[\begin{array}{ccc|ccccc}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0\\ \cdot & & \cdot & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdot & 0\\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_n\end{array}\right]. \tag{2.31}$$

(для трех одинаковых собственных значений λ_1)

Матрица **A** является неприводимой, если минимальный многочлен **A** и характеристическое уравнение совпадают. (Минимальным многочленом **A** называется многочленное уравнение минимального порядка вида

$$\mathbf{A}^q + \alpha_{q-1}\mathbf{A}^{q-1} + \cdots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I} = 0,$$

а характеристическое уравнение задается соотношением

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0,$$

где λ — собственное значение матрицы **A**.) Верхняя диагональная матрица из (2.31) известна как *блок Жордана.*

На диагонали матрицы **J** может быть несколько блоков Жордана, если существует больше одной группы одинаковых значений λ_i. Для управляемости необходимо, чтобы по крайней мере один элемент матрицы **B** в строке, соответствующей нижней строке каждого блока Жордана, и как минимум один элемент **B** в каждой другой строке были отличны от нуля [6].

Таким образом, критерий управляемости, основанный на канонизации, требует вычисления собственных значений и собственных векторов, а также последующего преобразования уравнения состояния. Объем вычислений при этом может оказаться весьма значительным.

2.3.2. *Критерий управляемости, основанный на разложении* exp (**A***t*)

Критерий управляемости, основанный на полиномиальном разложении переходной матрицы состояния $e^{\mathbf{A}t}$, принадлежит Калману [3]. Применимость этого критерия не ограничена системами с различными собственными значениями **A**. Здесь отпадает необходимость канонизации системы, что устраняет необходимость определения собственных векторов. Однако этот критерий меньше отражает физические свойства системы, чем критерий, рассмотренный в разд. 2.3.1.

Для проверки управляемости Калман использует решение уравнения состояния (2.1), заданное соотношением

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)}\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\,\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau, \qquad (2.32а)$$

или, при изменении пределов интегрирования,

$$\mathbf{x}(t_0) = e^{\mathbf{A}(t_0-t_1)}\,\mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_0} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\,\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau, \qquad (2.32б)$$

где **x**, **u** — n- и m-мерный векторы соответственно.

Поскольку всегда можно положить $\mathbf{x}(t_1) \stackrel{\Delta}{=} 0$, из уравнения (2.32) получаем

$$\mathbf{x}(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\,\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau. \tag{2.33}$$

Отметим, что в соответствии с теоремой Кэли — Гамильтона [12] любая матрица $\mathbf{A}$ размерности $n\times n$ удовлетворяет своему собственному многочленному уравнению порядка n, так что

$$\mathbf{A}^n = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \mathbf{A}^i. \tag{2.34}$$

Следовательно, можно представить любое многочленное матричное уравнение порядка $(n+r)>n$ многочленным уравнением порядка $(n+r-1)\geqslant(n-1)$:

$$\mathbf{A}^{n+r} = \mathbf{A}^r\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^r\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\mathbf{A}^i = \mathbf{P}_{n+r-1}(\mathbf{A}), \tag{2.35}$$

где $\mathbf{P}_{n+r-1}(\mathbf{A})$ — полином порядка $n+r-1$. В соответствии с теоремой Сильвестра (см. [12]) этот результат справедлив для бесконечных степенных рядов матрицы $\mathbf{A}$. Следовательно, замечая, что

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2t^2/2! + \ldots + \mathbf{A}^k t^k/k! + \ldots, \tag{2.36}$$

получаем

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(t)\,\mathbf{A}^i, \tag{2.37}$$

где для конечной величины t скалярные коэффициенты $\gamma_i(t)$ конечны для любой матрицы $\mathbf{A}$. Подстановка выражения для $e^{\mathbf{A}t}$ из уравнения (2.37) в (2.33) дает

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_0) &= -\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(t_0-\tau)\,\mathbf{A}^i\,\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{A}^i\,\mathbf{B}\int_{t_0}^{t_1}\gamma_i(t_0-\tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Далее положим

$$\mathbf{M} \stackrel{\Delta}{=} [\mathbf{B},\ \mathbf{AB},\ \mathbf{A}^2\mathbf{B},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \tag{2.39}$$

$$\mathbf{W}_i \stackrel{\Delta}{=} -\int_{t_0}^{t_1}\gamma_i(t_0-\tau)\,\mathbf{u}(\tau)\,d\tau,\quad \forall i \in (0, n-1), \tag{2.40}$$

и

$$\mathbf{W} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \mathbf{W}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{2.41}$$

где $\mathbf{M}$ — $n \times (n \times m)$-мерная матрица, а $\mathbf{W}_i$ и $\mathbf{W}$ — m- и $n \times m$-мерный векторы соответственно. Тогда уравнение (2.33) может быть представлено в виде

$$x(t_0) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}. \tag{2.42}$$

Следовательно, система, описываемая уравнением (2.1), управляема, если n независимых скалярных уравнений удовлетворяют матричному уравнению (2.42). Иначе говоря, система управляема, если матрица $\mathbf{M}$ имеет ранг n. В случае процессов с одним входом, где $\mathbf{B}$ — вектор-столбец, приведенное выше условие означает, что для управляемости должна существовать матрица $\mathbf{M}^{-1}$. В общем случае, когда размерность $\mathbf{u}$ меньше, чем $\mathbf{x}$, для достижения состояния $\mathbf{x}(t_0)$ по методу, указанному в разд. 2.3.1, элементы $\mathbf{u}$ должны принимать значения из нескольких кусочно-непрерывных множеств на интервале $(t_0—t_1)$. Отметим, что критерий управляемости не зависит от устойчивости системы. Поэтому система может быть управляемой, даже если она неустойчива при отсутствии управления, поскольку управляемость системы связана с потенциальными возможностями управления системой. Управляемая система, таким образом, стабилизируема независимо от того, устойчива она или неустойчива при отсутствии управления.

Пример 2.6

В этом примере мы проверим управляемость системы из примера 2.5 по критерию, основанному на разложении $\exp(\mathbf{A}t)$. Учитывая, что

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad {}^{r}\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix},$$

получаем

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Поскольку оба столбца (обе строки) матрицы $\mathbf{M}$ линейно зависимы ($\det \mathbf{M} = 0$), система оказывается неуправляемой, как уже было показано в примере 2.5 с помощью канонического преобразования.

2.3.3. Управляемость по выходу

Предыдущие разделы (2.3.1 и 2.3.2) были посвящены управляемости по состоянию, т. е. определению возможности приведения системы из любого состояния $\mathbf{x}(t_0)$ в любое состояние $\mathbf{x}(t_1)$. Понятие *управляемости по выходу* связано с возможностью перевода выхода системы из состояния $\mathbf{y}(t_0)$ в состояние $\mathbf{y}(t_1)$, когда выход $\mathbf{y}$ задается соотношением

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{2.43}$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — $(n\times 1)$- и $(q\times 1)$-мерный векторы соответственно, причем $q \leqslant n$.

Система, описываемая уравнениями (2.1) и (2.43), является управляемой по выходу, если состояние $\mathbf{y}(t_0)$ может быть переведено в любое $\mathbf{y}(t_1)$ за конечный промежуток времени τ ($\tau = t_1 - t_0$) при приложении к системе кусочно-непрерывного выходного вектора $\mathbf{u}(t)$, $t \in (t_0, t_1)$. Это определение управляемости по выходу идентично определению управляемости по состоянию, если $\mathbf{y}(t_0)$ и $\mathbf{y}(t_1)$ заменить соответственно на $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{x}(t_1)$. Аналогия распространяется и на критерий управляемости по выходу, хотя, очевидно, этот последний имеет меньше ограничений. Следовательно, заметив, что $\mathbf{y}$ в уравнении (2.43) является $(q\times 1)$-мерным вектором, найдем, что критерий разд. 2.3.2 (основанный на полиномиальном разложении) предусматривает наличие матрицы $\mathbf{M}'$ ранга q, где

$$\mathbf{M}' = [\mathbf{CB},\ \mathbf{CAB},\ \mathbf{CA^2B},\ \ldots,\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]. \tag{2.44}$$

Доказательство этого условия аналогично доказательству, приведенному в разд. 2.3.2.

2.4. Наблюдаемость

Выше было сказано, что понятие наблюдаемости дополняет понятие управляемости. Если управляемость требует, чтобы каждое состояние системы было чувствительно к воздействию входного сигнала, то наблюдаемость требует, чтобы каждое состояние системы влияло на измеряемый выходной сигнал.

Система наблюдаема, если все ее состояние можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы. Поэтому, когда определенное состояние (или изменение этого состояния) не влияет на выходной вектор, система ненаблюдаема (рис. 2.2), точно так же как отсутствие влияния вектора выходного сигнала на определенное состояние означает, что система неуправляема (показано на рис. 2.1). Кроме того, ненаблюдаемая система *не может быть идентифицирована;*

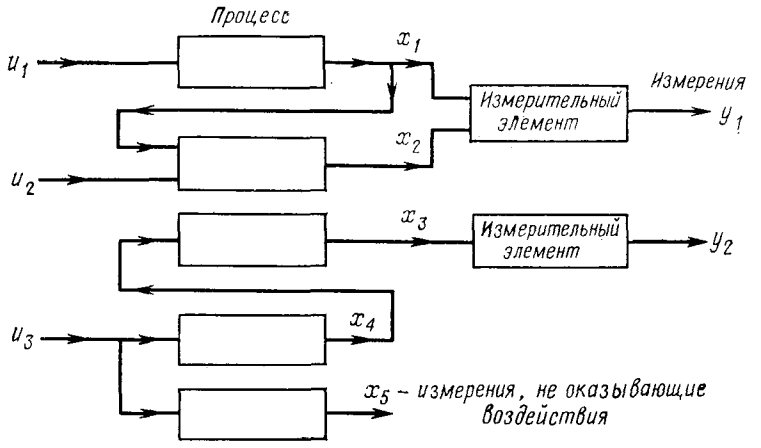


Рис. 2.2. Ненаблюдаемая система.

в терминах ее полной модели в пространстве состояний, очевидно, невозможна идентификация параметров, относящихся к ненаблюдаемым состояниям.

2.4.1. Критерий наблюдаемости канонических систем

Для линейных систем рассмотрим критерий наблюдаемости Гильберта [10], который требует предварительной диагонализации этих систем. Этот подход аналогичен использованному выше для критерия управляемости (разд. 2.3.1).

Рассмотрим систему уравнений (2.1) и (2.43), которая после канонизации записывается в виде

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{\Lambda x}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{u}, \tag{2.45}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^* \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{CV}, \tag{2.46}$$

где $\mathbf{V}$ — матрица собственных векторов (как в разд. 2.3).

Система наблюдаема, если ни один из столбцов $\mathbf{C}^*$ не является нулевым, т. е. если в матрице $\mathbf{C}^*$ присутствуют все $\mathbf{x}^*$, $\forall\ i\ (1, n)$. Если по крайней мере один столбец $\mathbf{C}^*$ — нулевой, то система становится ненаблюдаемой. Чтобы доказать последнее утверждение, рассмотрим диагонализируемую систему с различными собственными значениями, заданными в дискретной форме:

$$\mathbf{x}(k+1) = \boldsymbol{\varphi}\, \mathbf{x}(k) + \mathbf{Gu}(k), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.47}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k), \tag{2.48}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — диагональная матрица размерности $(n\times n)$ с различными элементами, а $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ — соответственно n-, m- и q-мерный векторы, причем $q\leqslant n$. Очевидно, что если все компоненты x_i вектора $\mathbf{x}$ присутствуют в $\mathbf{y}$, то измеримую скалярную величину z можно определить следующим образом:

$$z = \mathbf{w}^T\mathbf{y} = w_1y_1 + w_2y_2 + \ldots w_q\,y_q. \tag{2.49}$$

Здесь величину $\mathbf{w}$ выбираем так, чтобы все элементы $\mathbf{w}^T\mathbf{C}$ были не равны нулю.

Подставляя выражение для $\mathbf{y}$ из уравнения (2.48) в (2.49), получим

$$z(k) = \mathbf{w}^T\mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \mathbf{d}\mathbf{x}(k) = d_1x_1 + \ldots + d_n\,x_n,$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{w}^T\mathbf{C} \triangleq [d_1,\ \ldots,\ d_n], \tag{2.50}$$

где все x_i $(i=1, \ldots, n)$ присутствуют в z.

Для того чтобы определить $x_i(k)$ $\forall i$ по результатам измерения величины z, необходимо осуществить n измерений z в n моментов времени. Обозначая эти измерения через $z(j)$, для $j=k, \ldots, k+r$, где r — целое и $r\geqslant n-1$, из уравнений (2.47) и (2.50) получим для $x_i(k)$ n независимых уравнений вида

$$z(k) = \mathbf{d}\mathbf{x}(k), \tag{2.51а}$$

$$z(k+1) = \mathbf{d}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}\mathbf{G}\mathbf{u}(k), \tag{2.51б}$$

$$z(k+2) = \mathbf{d}\mathbf{x}(k+2) = \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{d}\mathbf{G}\mathbf{u}(k+1) =$$

$$= \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{d}\mathbf{G}\mathbf{u}(k+1), \tag{2.51в}$$

$$\vdots$$

$$z(k+r) = \mathbf{d}\mathbf{x}(k+r) = \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}^r\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}\sum_{\mu=0}^{r-1}\boldsymbol{\varphi}^{\mu}\mathbf{G}\mathbf{u}(k+r-\mu), \tag{2.51г}$$

где $\boldsymbol{\varphi}_0 \triangleq \mathbf{I}$.

Введем n-мерный вектор измерений $\mathbf{Z}(k)$:

$$Z(k) \triangleq [z(k), \ldots, z(k+r)]^T, \tag{2.52}$$

который содержит только n-е элементы. Тогда уравнение (2.51) запишется в виде

$$Z(k) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \sum_{i=0}^{r-1}\lambda_i\,\mathbf{u}(k+i), \tag{2.53}$$

где λ_i определяется из уравнения (2.51) и

$$\mathbf{P} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi} \\ \vdots \\ \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}^{n-1} \end{bmatrix} = (n\cdot n)\text{-матрица}. \tag{2.54}$$

Предполагается, что уравнения $\mathbf{u}(k+i)$ в уравнении (2.53) могут быть измерены и потому их присутствие в этом уравнении не вызовет ненаблюдаемости. Далее, поскольку матрица $\boldsymbol{\varphi}$ диагональная с различными элементами, то строки уравнения (2.54) линейно независимы и $\mathbf{P}^{-1}$ существует. Следовательно, $\mathbf{x}(k)$ можно найти из уравнения (2.53), если $\mathbf{Z}(k)$ и $\mathbf{u}(k+i)$ известны. Очевидно, что если уравнение (2.50) не содержит компонент x_i вектора состояния $\mathbf{x}$, то ни z, ни $\mathbf{y}(k)$ в уравнении (2.49) не содержат никакой информации об этих x_i и определить состояние системы на основании измерений $\mathbf{y}(k)$ невозможно. В последнем случае $\mathbf{d}$ является вектор-строкой с числом элементов n—1 [или даже с меньшим числом элементов, если последующие компоненты вектора состояния не появятся в уравнении (2.50)]. Следовательно, матрица $\mathbf{P}$ в уравнении (2.54) вырождена и не может быть обращена для получения $\mathbf{x}$ по результатам измерений.

Пример 2.7

Рассмотрим систему $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}$, где $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, как в примере 2.5, а $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$ и $\mathbf{C}=[1 \quad 1]$.

Из примера 2.5 уже известно, что $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ является матрицей собственных векторов $\mathbf{A}$. Для определения наблюдаемости системы в данном примере вычислим

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{V} = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = [0 \quad 3].$$

Поскольку первый столбец матрицы $\mathbf{C}^*$ равен нулю, система ненаблюдаема.

2.4.2. *Критерий наблюдаемости, основанный на разложении* exp $(\mathbf{A}t)$

Критерий наблюдаемости, основанный на полиномиальном разложении переходной матрицы состояния $e^{\mathbf{A}t}$, аналогичен критерию управляемости в разд. 2.3.2.

Рассмотрим непрерывные уравнения состояния и измерений системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{2.55а}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \tag{2.55б}$$

Полагая, что входной вектор $\mathbf{u}(t)$ может быть измерен, можно сказать, что равенство нулю вектора $\mathbf{u}(t)$ не влияет на кри-

терий наблюдаемости. Поэтому для упрощения последующего анализа положим $\mathbf{u}(t)=\mathbf{0}$. В итоге получим

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\,\mathbf{x}(t_0). \tag{2.56}$$

Используя выражение для $e^{\mathbf{A}t}$ так же, как и в уравнении (2.37), приведем уравнение (2.56) к виду

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t-t_0)\,\mathbf{C}\mathbf{A}^i\,\mathbf{x}(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^i\,\gamma_i(t-t_0)\,\mathbf{x}(t_0). \tag{2.57}$$

Обозначим

$$\mathbf{L} \triangleq [\mathbf{C}^T,\ \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T,\ (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T,\ \ldots,\ (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T] \tag{2.58}$$

и

$$\mathbf{\Gamma} \triangleq [\gamma_0,\ \ldots,\ \gamma_i,\ \ldots,\ \gamma_{n-1}]. \tag{2.59}$$

Тогда уравнение (2.58) принимает вид

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Gamma}\mathbf{L}^T\mathbf{x}(t_0). \tag{2.60}$$

Заметим, что γ_i и, следовательно, $\mathbf{\Gamma}$ будут иметь различные значения в разные моменты времени t при одном и том же t_0. Таким образом, для полной наблюдаемости системы уравнений (2.55) (т. е. для однозначного определения всех элементов $\mathbf{x}(t_0)$ по $\mathbf{y}$) требуется, чтобы n столбцов матрицы $\mathbf{L}$ были линейно независимы, т. е. чтобы матрица $\mathbf{L}$ имела ранг n. Далее для получения $\mathbf{x}(t_0)$ можно, как и в разд. 2.4.1, потребовать, чтобы измерения производились в различные моменты времени t.

Пример 2.8

Рассмотрим систему, которая имеет две переменные состояния и одну измеряемую переменную и у которой два столбца матрицы $\mathbf{L}$ из уравнения (2.58) линейно зависимы, так что

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1, & 3l_1 \\ l_2, & 3l_2 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (2.60), таким образом, приобретает вид

$$\mathbf{y}(t) = [\gamma_0,\ \gamma_1]\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ 3l_1 & 3l_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\gamma_0,\ \gamma_1]\begin{bmatrix} l_1x_1 + l_2x_2 \\ 3l_1x_1 + 3l_2x_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \{(\gamma_0)_{t-t_0}(l_1x_1 + l_2x_2)_{t_0}\} + 3\{(\gamma_1)_{t-t_0}(l_1x_1 + l_2x_2)_{t_0}\}.$$

Поскольку $\mathbf{L}$ *не зависит от* t, *состояния* x_1, x_2 *определить однозначно нельзя; они появляются в форме комбинации* $l_1x_1+l_2x_2$, *даже если* $\mathbf{y}$ измеряется (а γ_0, γ_1 вычисляются) для любого числа различных моментов времени t. (См. также задачу 2.6).

2.5. Связь между представлением в пространстве состояний и представлением с помощью передаточных функций

Проводимый ниже (разд. 2.5.1, 2.5.2) анализ посвящен выявлению связи между представлением в пространстве состояний и моделями в терминах скалярных передаточных функций; оба эти типа представлений широко используются в классической теории управления и теории систем. Анализ проводится с целью облегчения перехода от одной формы представления к другой и должен способствовать тем самым более широкому применению разработанных для них методов. Приводимые ниже выкладки относятся в основном к дискретным системам. Однако возможность распространения их на случай непрерывных систем становится очевидной, если предположить, что время дискретизации стремится к нулю. В случае нескольких входов преобразование можно применять в данный момент времени только к одному входу.

2.5.1. Получение моделей в пространстве состояний по скалярным передаточным функциям

В этом разделе мы рассмотрим представление в виде скалярных передаточных функций, связывающее выход системы с одной (скалярной) входной переменной. В случаях когда имеется несколько входов, необходимо вводить несколько передаточных функций. Для определения моделей в пространстве состояний по скалярным передаточным функциям используем дискретные передаточные функции, в качестве которых рассматривается z-преобразование передаточных функций. Можно, однако, получить и непрерывное представление путем аппроксимации

$$\frac{x(k+1)-x(k)}{\Delta t} \text{ с помощью } \frac{dx(t)}{dt} \text{ при } t = k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пусть передаточная функция, полученная z-преобразованием, задана выражением

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = \frac{y(z)}{u(z)}, \tag{2.61}$$

где z^{-1} — оператор сдвига [13], удовлетворяющий условию $z^{-i} y_k \stackrel{\Delta}{=} y_{k-i}$, u и y обозначают соответственно входную и выходную переменные, а $m \leqslant n$ для реализуемых систем.

Перемножив обе части уравнения (2.61) и принимая во внимание определение z, получим

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \cdots + b_m u_{k-m}. \tag{2.62}$$

Уравнение (2.62) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}\,\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{\Gamma} u(k-1), \tag{2.63}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \tag{2.64}$$

где $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{C}$ определяются соотношениями [14]

$$\mathbf{\Phi} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & \mathbf{I} \\ \hline -a_n,\ -a_{n-1},\ldots,\ -a_1 & \end{array}\right], \tag{2.65}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \mathbf{0} \\ a_2 & a_1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n-1} & \ldots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \alpha^{-1}\beta, \tag{2.66}$$

$$\mathbf{C} = [1, 0, \ldots, 0]. \tag{2.67}$$

Здесь $\mathbf{\Phi}$ — коагулированная матричная форма [11], а α в уравнении (2.66) — нижняя треугольная матрица, обращение которой легко получается подстановкой.

Отметим, что нулевой член $b_0 z^0$ в уравнении (2.61) обозначает мгновенную связь между входом и выходом, для которой уравнение (2.63) не выполняется. Следовательно, если дискретные уравнения состояния, основанные на конечно-разностном представлении $d\mathbf{x}/dt$, используются для получения передаточной функции (2.61) или наоборот, то коэффициент b_0 не должен появляться в уравнениях (2.61) и (2.62).

Представление в пространстве состояний уравнений (2.63)—(2.67) соответствует представлению по уравнению (2.62) и, следовательно, в форме передаточной функции (2.61). Покажем это следующим образом.

Пусть

$$\mathbf{x} \triangleq [x_1, \ldots, x_n]^T, \tag{2.68}$$

$$\mathbf{\Gamma} \triangleq [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]^T. \tag{2.69}$$

Используя уравнение (2.64) с матрицей $\mathbf{C}$ из уравнения (2.67), получаем

$$x_1(k) = y(k). \tag{2.70}$$

Преобразуя уравнение (2.63) с учетом уравнения (2.65) для матрицы $\mathbf{\Phi}$, получим

$$x_1(k) = x_2(k-1) + \gamma_1 u(k-1)$$

или, перегруппировывая члены и принимая во внимание уравнение (2.70),

$$x_2(k) = x_1(k+1) - \gamma_1 u(k) = y(k+1) - \gamma_1 u(k).$$

Аналогично

$$x_i(k) = y(k+i-1) - \sum_{j=2}^{i} \gamma_{j-1} u(k+i-j) \text{ при } i \leqslant n. \quad (2.71)$$

Здесь $x_n(k)$ задается соотношением

$$x_n(k) = y(k+n-1) - \gamma_1 u(k+n-2) - \cdots - \gamma_{n-1} u(k). \quad (2.72)$$

Приравнивая нижнюю строку матричного уравнения (2.63) выражению (2.72) и используя Φ из уравнения (2.65), получаем

$$-a_n x_1(k-1) - \cdots - a_1 x_n(k-1) + \gamma_n u(k-1) = \\ = y(k+n-1) - \gamma_1 u(k+n-2) - \cdots - \gamma_{n-1} u(k). \quad (2.73)$$

Подставляя выражение для $x_i(k)$ $\forall i = 1,\ldots, n-1$ из уравнения (2.71) в (2.73), найдем далее

$$y(k+n-1) - \gamma_1 u(k+n-2) - \cdots - \gamma_{n-1} u(k) = \\ = -a_n y(k-1) - \cdots - a_1 y(k+n-2) + \\ + a_{n-1}\gamma_1 u(k-1) + a_{n-2}[\gamma_1 u(k) + \gamma_2 u(k-1)] + \\ + \cdots + a_1[\gamma_1 u(k+n-3) + \cdots + \gamma_{n-1} u(k-1)] + \\ + \gamma_n u(k-1). \quad (2.74)$$

Затем после перегруппировки в уравнении (2.74) получаем

$$y(k+n-1) + a_1 y(k+n-2) + a_2 y(k+n-3) + \cdots + a_n y(k-1) = \\ = a_{n-1}\gamma_1 u(k-1) + a_{n-2}[\gamma_1 u(k) + \gamma_2 u(k-1)] + \cdots + \\ + a_1[\gamma_1 u(k+n-3) + \cdots + \gamma_{n-1} u(k-1)] + \\ + \gamma_1 u(k+n-2) + \cdots + \gamma_n u(k-1) = b_1 u(k+n-2) + \\ + b_2 u(k+n-3) + \cdots + b_m u(k+n-m-1), \quad (2.75)$$

так что

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma_1, \\ b_2 &= \gamma_2 + a_1\gamma_1, \\ &\vdots \\ b_m &= \gamma_m + a_1\gamma_{m-1} + \cdots + a_{m-1}\gamma_1, \\ 0 &= \gamma_j + a_1\gamma_{j-1} + \cdots + a_{j-1}\gamma_1 \ \forall n \geqslant j > m. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Уравнение (2.76) может быть записано в матричной форме таким образом:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ a_1 & 1 & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}\Gamma, \qquad (2.77)$$

что дает

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\,\boldsymbol{\beta}. \qquad (2.78)$$

Здесь $\boldsymbol{\beta}$ — n-мерный вектор, $m \leqslant n$. Поскольку уравнение (2.75) удовлетворяет уравнениям (2.65)—(2.67), представление уравнений (2.63)—(2.67) в пространстве состояний завершено.

Пример 2.9

Для того чтобы проиллюстрировать получение модели в пространстве состояний по дискретной передаточной функции, рассмотрим систему, задаваемую следующей дискретной передаточной функцией:

$$G(z) = \frac{0{,}6z}{z^2 - 1{,}6z + 1} = \frac{0{,}6z^{-1}}{1 - 1{,}6z^{-1} + z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{y(z)}{u(z)},$$

где u, y — соответственно вход и выход системы.

Чтобы получить дискретную модель этой системы в пространстве состояний [как в уравнениях (2.63) и (2.64)] с матрицей $\mathbf{C}$ из уравнения (2.67), вычислим $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\Gamma}$ в соответствии с уравнениями (2.65) и (2.66):

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & +1{,}6 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1{,}6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1{,}6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}96 \end{bmatrix}.$$

В результате получим

$$x_1(k) = x_2(k-1) + 0{,}6u(k-1),$$
$$x_2(k) = -x_1(k-1) + 1{,}6x_2(k-1) + 0{,}96u(k-1)$$

и

$$y(k) = x_1(k).$$

2.5.2. *Получение скалярных передаточных функций на основе моделей в пространстве состояний*

Если для наблюдаемой системы задана ее линейная модель в пространстве состояний, то передаточная функция может быть получена путем преобразования модели в пространстве состояний в коагулированную форму. Для упрощения выкладок представления в пространстве состояний и с помощью передаточных функций будем рассматривать в дискретной форме. Следовательно, можно непосредственно использовать результаты анализа уравнений (2.61)—(2.78).

Рассмотрим наблюдаемую линейную систему, задаваемую дискретной моделью в пространстве состояний:

$$\mathbf{w}(k+1) = \boldsymbol{\psi}\mathbf{w}(k) + \boldsymbol{\Omega}u(k), \tag{2.79}$$
$$y(k) = \mathbf{D}\mathbf{w}(k), \tag{2.80}$$

где $\mathbf{w}$ — вектор состояния системы, а u, y — скалярные входная и выходная переменные.

Последующий анализ сводится к получению дискретной скалярной передаточной функции для системы уравнений (2.79), (2.80), имеющей по аналогии с уравнением (2.61) вид

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}. \tag{2.81}$$

Поскольку наибольшее значение m в уравнении (2.81) равно n для систем вида (2.79) и так как коэффициенты a_i, b_i неизвестны, допустим, что $m=n$ (см. также последующий вывод). Перемножив числители на знаменатели в уравнении (2.81), получим

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) =$$
$$= b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n), \tag{2.82}$$

что эквивалентно уравнению (2.62) при $n=m$.

Замечая, что система уравнений (2.79), (2.80) наблюдаема, ее преобразование в коагулированную форму может быть осуществлено при помощи матрицы преобразования **T** [14]:

$$\mathbf{T} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D}\psi \\ \vdots \\ \mathbf{D}\psi^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.83}$$

Таким образом, получается следующая преобразованная модель в пространстве состояний:

$$\mathbf{w}^*(k+1) = \psi^*\mathbf{w}^*(k) + \Omega^* u(k), \tag{2.84}$$

$$y(k) = \mathbf{D}^*\mathbf{w}^*(k), \tag{2.85}$$

где $\mathbf{w}^*$, φ^*, Ω^*, $\mathbf{D}^*$ — преобразованные $\mathbf{w}$, φ, Ω, $\mathbf{D}$ из уравнений (2.79), (2.80), удовлетворяющие условиям

$$\psi^* \triangleq \mathbf{T}\psi\mathbf{T}^- = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & \mathbf{I} \\ 0 & \\ \hline -\alpha_n \cdots -\alpha_1 & \end{array}\right], \tag{2.86}$$

$$\mathbf{w}^* \triangleq \mathbf{T}\mathbf{w}, \tag{2.87}$$

$$\Omega^* \triangleq \mathbf{T}\Omega, \tag{2.88}$$

$$\mathbf{D}^* \triangleq \mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}. \tag{2.89}$$

Матрица в правой части уравнения (2.86) имеет коагулированную форму [11]. Подстановка $\mathbf{x}$ вместо $\mathbf{w}^*$, φ вместо φ^*, Γ вместо Ω^* и $\mathbf{C}$ вместо $\mathbf{D}^*$ в уравнениях (2.84) и (2.85) дает систему уравнений, идентичных уравнениям (2.63)—(2.67). Принимая во внимание эквивалентность уравнений (2.84), (2.85) модели уравнений (2.63)—(2.67) в пространстве состояний и анализируя уравнения (2.61)—(2.78), получим передаточную функцию для системы уравнений (2.84), (2.85), задаваемую уравнением (2.61) при $m=n$. Следовательно, коэффициенты a_i уравнения (2.81) удовлетворяют условию

$$a_i = \alpha_i, \quad \forall i = 1,\ldots,n, \tag{2.90}$$

где α_i в уравнении (2.86) получаются с помощью преобразования φ из уравнения (2.79). Далее, чтобы завершить определение передаточной функции, коэффициенты b_j зададим уравнением (2.77). Отметим также, что на основании уравнений (2.77), (2.88) $j \in (1, m)$, где m имеет размерность Ω.

Пример 2.10

Проведенный вывод передаточной функции с помощью z-преобразования можно проследить на примере системы, задаваемой уравнениями (2.79), (2.80), при

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [2 \;\; 1].$$

Получение передаточной функции для этой системы начинается с вычисления матрицы $\mathbf{T}$ по уравнению (2.83):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D}\boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix},$$

для которой

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}875 & -0{,}125 \\ -0{,}75 & 0{,}25 \end{bmatrix}.$$

Далее получаем

$$\boldsymbol{\psi}^* = \mathbf{T}\boldsymbol{\psi}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}875 & -0{,}125 \\ -0{,}75 & 0{,}25 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 34 & 33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}875 & -0{,}125 \\ -0{,}75 & 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \mathbf{T}\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D}\mathbf{T}^{-1} = [2 \;\; 1]\begin{bmatrix} 0{,}875 & -0{,}125 \\ -0{,}75 & 0{,}25 \end{bmatrix} = [1 \;\; 0].$$

Можно видеть, что $\boldsymbol{\varphi}^*$ имеет коагулированную форму, как и $\boldsymbol{\Phi}$ из уравнения (2.65). Кроме того, $\mathbf{D}^*$ соответствует $\mathbf{C}$ из уравнения (2.67), а $\boldsymbol{\Omega}^*$ соответствует $\boldsymbol{\Gamma}$ из уравнения (2.77). Следовательно, $G(z)$ непосредственно получается из уравнений (2.65), (2.77), так что

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -4, \\ a_2 &= -5 \end{aligned}\right\} \text{ из уравнения (2.65),}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1^* \\ \boldsymbol{\Omega}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

согласно уравнению (2.77) и

$$G(z) = \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 4z^{-1} - 5z^{-2}}$$

в соответствии с уравнением (2.61) или (2.81).

2.5.2а. Непрерывный случай. Аналитический вывод передаточной функции для непрерывного случая можно получить, используя преобразованную по Лапласу модель в пространстве состояний:

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}u(s), \tag{2.91}$$

$$y(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s), \tag{2.92}$$

где s обозначает переменную в преобразовании Лапласа [13], а $\mathbf{x}$, u, y — вектор состояния и скалярные входную и выходную переменные соответственно.

Уравнение (2.91) дает

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}u(s) \tag{2.93}$$

и

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}u(s). \tag{2.94}$$

Далее, используя уравнение (2.92), получаем

$$y(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) = \mathbf{C}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}u(s), \tag{2.95}$$

так что передаточная функция $G(s)$ записывается в виде

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \mathbf{C}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}. \tag{2.96}$$

Так как s не является числом, последний способ получения передаточной функции не может быть реализован на ЦВМ в отличие от модели, определяемой уравнениями (2.79)—(2.90). Однако простота аналитического вывода передаточной функции в соответствии с уравнением (2.96) может быть проиллюстрирована на следующем примере.

Пример 2.11

Рассмотрим систему, заданную уравнениями

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} u,$$

$$y = x_1.$$

В результате преобразования Лапласа получаем

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

и

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$G(s) = [1\ \ 0]\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{9}{s^2+3s+2}.$$

Аналогичный вывод может быть получен для дискретных моделей в пространстве состояний, если аппроксимировать

$$\frac{dx(t)}{dt} \text{ с помощью } \frac{x(k+1)-x(k)}{\Delta t} \text{ при } t = k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Приведенный выше пример показывает, что когда оба элемента матрицы **B** в уравнении (2.91) не равны нулю, например $\mathbf{B} = [1\ \ 9]^{\tau}$, то в числителе $G(s)$ появляется s. Эта ситуация эквивалентна b_1, $b_2 \neq 0$, $n=2$ в уравнении (2.81), так что число элементов b_i равно размерности $\boldsymbol{\Omega}$ в уравнении (2.79) в дискретном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sokolnikoff I. S., Redheffer R. M., Mathematics of Physics and Modern Engineering, McGraw-Hill, New York, 1966.
2. Mann J., Marshall S. A., Nicholson H., A Review of Matrix Techniques in Multivariable Systems Control, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, **179**, Pt. 3H, pp. 153—161 (1965).
3. Kalman R. E., On the General Theory of Control Systems, Proc. 1st IFAC Congress, Moscow, 1960.
4. Wonham W. M., On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, *IEEE Trans.*, **AC-12**, No. 6, pp. 660—665 (1967).
5. Gilbert E. G., Controllability and Observability in Multivariable Control Systems, *Jour. Soc. Indst. Appl. Math.*, Ser. A, **1**, No. 2, pp. 128—151 (1963).
6. Kuo B. C., Automatic Control Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.
7. Athans M., Falb P. L. Optimal Control, McGraw-Hill, New York, 1966. [Русский перевод: Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968.]
8. Koppel L. B. Introduction to Control Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968.
9. Sage A. P., Optimum Systems Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968.
10. Elgerd O. I., Control Systems Theory, McGraw-Hill, New York, 1967.
11. Ayres F., Theory and Problems of Matrices, Schaum, New York, 1962.
12. Pipes L. A., Matrix Methods for Engineers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
13. Wilts C. H., Principles of Feedback Control, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960.
14. Lee R. C. K., Optimal Estimation, Identification and Control, MIT Press, Cambridge, Mass., 1964. [Русский перевод: Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. — М.: Наука, 1966.]

Задачи

1. Преобразуйте систему $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{u}$, где $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, путем преобразования матрицы $\boldsymbol{\varphi}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ и найдите собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ и преобразованной матрицы $\mathbf{A}^*$.

2. Диагонализуйте систему $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$, где $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$.

3. Исследуйте управляемость системы, заданной уравнением $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$, где $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$, преобразуя систему к канонической форме.

4. Исследуйте управляемость системы $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$, где $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$, используя критерий, основанный на разложении $\exp(\mathbf{A}t)$.

5. Исследуйте наблюдаемость системы из задачи 3 при $\mathbf{C}=[1\ 1]$, преобразуя систему к канонической форме.

6. Проверьте наблюдаемость системы из задачи 4 при $\mathbf{C}=[1\ 2]$, используя критерий, основанный на разложении $\exp(\mathbf{A}t)$.

7. Постройте дискретную модель в пространстве состояний в форме уравнений (2.63), (2.64) для системы с передаточной функцией

$$G(z)=\frac{0{,}6z^2}{z^3-2{,}5z^2+1{,}4z-0{,}9}=\frac{y(z)}{u(z)}.$$

8. Определите передаточную функцию $G(z)$ для системы, заданной уравнениями (2.79), (2.80), при

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 8 & 6\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=[1\ 0].$$

9. Определите передаточную функцию $G(z)$ для системы, заданной уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u,\quad y=x_1.$$

3

Методы идентификации с помощью синусоидальных, ступенчатых и импульсных сигналов

Первые реализованные в системах управления методы идентификации были основаны на использовании частотных, ступенчатых и импульсных воздействий. Большинство этих методов ограничивается применением для линейных процессов. Они могут быть также использованы и в линеаризованных системах, если уровни сигналов невелики (см. приложение 1). Эти методы требуют специальных входных сигналов, а именно ступенчатых сигналов для идентификации по переходной функции (ступенчатой переходной функции), импульсных входных сигналов для идентификации по импульсной переходной функции и синусоидальных входных сигналов с различными частотами для определения частотной характеристики. Поскольку вместо входных сигналов, сответствующих нормальному режиму работы, требуются указанные выше специальные сигналы, то очевидно, что эти методы предполагают идентификацию вне процесса управления. Поэтому указанные методы применимы только к линейным стационарным процессам, где отношения вход/выход, полученные для одного типа входных сигналов, сохраняются для всех других типов входных сигналов.

Из трех типов входных сигналов, о которых говорилось выше, ступенчатый входной сигнал является наиболее простым для применения (он соответствует, например, открыванию или закрыванию входного клапана либо включению или выключению входного напряжения), тогда как для подачи синусоидального входного сигнала требуется формирование синусоидальных воздействий и изменение частоты в соответствующем диапазоне. При идентификации по импульсному воздействию часто возникают технические трудности, связанные с формированием и использованием импульсных входных сигналов. Этот метод нельзя применить к линеаризованным системам, так как амплитуда импульса по определению не может быть малой.

3.1. Методы идентификации, основанные на преобразовании Фурье

В настоящей главе для идентификации с помощью синусоидальных (разд. 3.2), ступенчатых (разд. 3.3) и импульсных

(разд. 3.4) входных сигналов вне процесса управления используется преобразование Фурье. В следующей главе рассматривается применение преобразования Фурье для идентификации в реальном масштабе времени при входных сигналах с шумом. Исследуем некоторые свойства преобразования Фурье.

Рассмотрим апериодическую функцию времени $x(t)$. Преобразование Фурье $X(j\omega)$ для $x(t)$ определяется соотношением

$$F[x(t)] \triangleq X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{3.1}$$

Преобразование Фурье можно применить к функции $x(t)$, если она абсолютно интегрируема, т. е. при условии [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty. \tag{3.2}$$

Это условие исключает возможность непосредственного применения преобразования Фурье к таким входным функциям, как синусоидальные или ступенчатые. Трудность применения преобразования Фурье к синусоидальным или ступенчатым функциям может быть преодолена, если рассматривать интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t}\, dt < \infty$ при некотором, даже очень небольшом положительном значении σ. Тогда $x(t)e^{-\sigma t}$ можно рассматривать как $x(t)$. Используя преобразование Лапласа, получим

$$X(s) = L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt, \quad s \triangleq \sigma + j\omega. \tag{3.3}$$

Следовательно, ступенчатый входной сигнал рассматривается как асимптотически (и очень медленно) уменьшающаяся ступенька, а синусоидальный входной сигнал — как слабо демпфированный (строгое математическое доказательство этого подхода дано в работе [2]).

Теперь можно получить преобразования Лапласа и Фурье стационарных линейных соотношений вход/выход следующим образом. Рассмотрим линейную систему $G(s)$ (рис. 3.1), выход которой $x(t)$ при входном сигнале y определяется следующим интегральным выражением:

$$x(t) = \int_{0}^{t} y(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau, \quad g(t) = L^{-1}[G(s)]. \tag{3.4}$$

(Здесь $L^{-1}[\ \ ]$ — обратное преобразование Лапласа.) Уравнение (3.4) в форме преобразования Фурье имеет вид

$$X(j\omega) = G(j\omega)\, Y(j\omega). \tag{3.5}$$

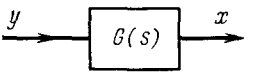


Рис. 3.1. Представление линейной системы в параметрах вход/выход.

Преобразование Лапласа для уравнения (3.4) есть

$$X(s) = G(s)Y(s), \tag{3.6}$$

где $G(j\omega)$ и $G(s)$ — передаточные функции системы при использовании преобразований Фурье и Лапласа соответственно. В уравнении (3.5) $G(j\omega)$ можно переписать в виде $\alpha_\omega + j\beta_\omega = G(j\omega)$, т. е. как комплексный коэффициент усиления системы при входном сигнале с частотой ω. Следовательно, $\sqrt{\alpha_\omega^2 + \beta_\omega^2} = |G(j\omega)|$ есть модуль коэффициента усиления, $\operatorname{arctg}(\beta/\alpha)$ — сдвиг фазы между выходным и входным сигналами, а изменение $G(j\omega)$ в зависимости от ω — частотная характеристика системы.

В разд. 3.2 рассматривается определение характеристики $G(j\omega)$ с использованием синусоидальных входных сигналов. Однако применение преобразований Фурье облегчает получение $G(j\omega)$ с помощью и других входных сигналов, как показано в разд. 3.3 и 3.4, а также в гл. 4.

Получение характеристики $G(j\omega)$ с помощью преобразования Фурье в случае использования ступенчатых или импульсных входных сигналов гораздо проще, так как преобразование Фурье для импульсной переходной функции равно $G(j\omega)$, а для переходной функции есть $G(j\omega)/j\omega$ [с учетом соображений, изложенных после уравнения (3.2)]. Поэтому $G(j\omega)$ легко получается в цифровом выражении, если к переходной или импульсной переходной функции применяется цифровое преобразование Фурье (алгоритм «быстрого преобразования Фурье» [3—5]). Кроме того, из рассмотрения уравнения (3.5) следует, что если преобразование Фурье применяется к конечному входному и соответствующему выходному сигналам, то характеристику $G(j\omega)$ можно определить следующим образом:

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{\text{Выход}\,(j\omega)}{\text{Вход}\,(j\omega)}. \tag{3.7}$$

Однако этот метод связан с численным преобразованием выходного и входного сигналов, а значит, и с делением двух комплексных величин $X(j\omega)$ и $Y(j\omega)$ при многих различных частотах. Поэтому указанный метод довольно трудоемок, даже если применяется быстрое преобразование Фурье. Исключениями являются случаи, когда применяются ступенчатые или импульсные входные сигналы, о которых уже упоминалось, и случаи с зашум-

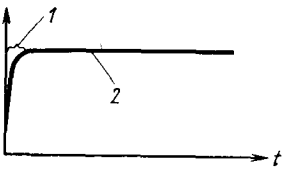


Рис. 3.2. Аппроксимация ступенчатой функции возрастающей экспонентой.
1 — ступенчатая функция; *2* — аппроксимирующая функция.

ленными входными сигналами, которые будут обсуждаться в гл. 4.

В подходе, рассмотренном в гл. 4, используются методы корреляционных функций для преобразования задачи идентификации в задачу идентификации по импульсной переходной функции без приложения импульса на входе. Это облегчает идентификацию в реальном масштабе времени. Очевидно, входные сигналы, используемые в методах идентификации с преобразованием Фурье, должны содержать все частоты, представляющие интерес при анализе характеристик системы. Если ступенчатый входной сигнал реализуется в виде возрастающей экспоненциальной функции времени $1-e^{-t/T}$ (рис. 3.2), то самая высокая частота ω, которая может быть точно идентифицирована с помощью преобразования Фурье, равна $2\pi/T$ (в идеальном случае $T=0$).

3.1.1. Цифровые преобразования Фурье

Для цифрового преобразования Фурье необходима аппроксимация интеграла уравнения (3.1) суммированием:

$$X(n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi(nk/N)}, \tag{3.8}$$

где

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t),$$

$$X(n) \triangleq X(jn\Delta\omega), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$t_k \triangleq k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (N-1),$$

$$\Delta t \triangleq T/N,$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n/T, \quad \Delta\omega = 2\pi/T,$$

$$\omega t = \frac{2\pi nk\Delta t}{T} = \frac{2\pi nk}{N}.$$

Очевидно, при дискретной аппроксимации пределы суммирования в уравнении (3.8) конечны. Из соображений точности предел суммирования N, который обозначает рассматриваемый диапазон времени, должен стремиться к бесконечности. Следовательно, интеграл времени T в случае ступенчатых или импульсных входных сигналов должен быть больше времени, необходимого для того, чтобы реакция системы уменьшилась до какой-то заданной минимальной величины. Таким образом, интервал выборки Δt связан с самой высокой частотой в анализируемой частотной характеристике, так как частота, превышающая $\frac{1}{2}\Delta t$ [Гц], не будет иметь практического значения.

На практике для вычисления преобразований Фурье и их инверсий лучше всего использовать процедуру быстрого преобразования Фурье [3]. Такая процедура в $N/\log_2 N$ раз быстрее процедуры, основанной на прямом вычислении уравнения (3.8), и характеризуется меньшими ошибками округления вследствие меньшего числа необходимых вычислительных операций. Метод быстрого преобразования Фурье базируется на матричной форме уравнения (3.8):

$$\mathbf{F} \triangleq \mathbf{W} \cdot \mathbf{X}, \tag{3.9}$$

где

$$\mathbf{F} \triangleq [X(0),\ldots, X(n)]^T, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{X} = [x(0),\ldots, x(n)]^T \tag{3.11}$$

и

$$\mathbf{W} \triangleq \begin{bmatrix} W_0 & W_0 & \cdots & W_0 \\ W_0 & W_1 & W_2 \cdots & W_{N-1} \\ W_0 & W_2 & W_4 \cdots & W_{2(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & \\ W_0 & W_{N-1} & \cdots & W_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Здесь элемент W_μ определяется выражением

$$W_\mu = e^{-j2\pi\mu/N}, \tag{3.13}$$

а μ обозначает произведение $n \cdot k$ в уравнении (3.8). Эффективность быстрого преобразования Фурье определяется свойствами симметрии матрицы $\mathbf{W}$ и уравнения (3.9). Это приводит к значительному уменьшению числа арифметических действий. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье, записанные на наиболее распространенных языках вычислительных машин (таких, как АЛГОЛ или ФОРТРАН), основаны на алгоритме Кули и Тьюки

[3] и имеются практически в каждой библиотеке вычислительных программ. Полная АЛГОЛ-программа для вычисления быстрого преобразования Фурье дана в работе [4]. Вычислительные аспекты для случаев, когда частотная характеристика определяется с помощью корреляционных функций, рассматриваются в разд. 4.3 и 4.4.

3.2. Идентификация с помощью частотной характеристики

Частотный метод идентификации линейных систем основан на работах Найквиста [6] и Боде [7] и использует амплитудные частотные характеристики. В частотном методе полагается, что на вход подается синусоидальный сигнал, частота которого изменяется в рассматриваемом диапазоне. Следствием этого могут быть значительные практические трудности при формировании синусоидальных входных сигналов с различными частотами. Метод основан на следующем преобразовании Лапласа для отношения входа и выхода (см. рис. 3.1):

$$X(s) = G(s)\,Y(s), \tag{3.14}$$

или

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}, \tag{3.15}$$

где $G(s)$, $X(s)$ и $Y(s)$ — передаточная функция, выход и вход системы соответственно. Взаимосвязь между концепциями передаточной функции и переменной состояния обсуждается в разд. 2.5. Возможен переход от концепции передаточной функции к пространству состояний и наоборот. Заметим, что переменная s преобразования Лапласа есть

$$s = \sigma + j\omega, \tag{3.16}$$

а так как нас интересует только изменение соотношения вход/выход в передаточной функции G (рис. 3.1) по частоте, то можно предположить, что $\sigma \to 0$. Тогда получим

$$X(j\omega) = G(j\omega) \cdot Y(j\omega). \tag{3.17}$$

Уравнение (3.17) представляет собой выражение преобразования Фурье, справедливое для сходящихся функций $g(t)$, $x(t)$ и $y(t)$, где

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}[G(s)], \\ x(t) &= L^{-1}[X(s)], \\ y(t) &= L^{-1}[Y(s)]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Таким образом, $G(j\omega)$ обозначает передаточную функцию системы при частоте ω (рад/с). Так как $G(j\omega)$ — комплексная вели-

чина, то можно рассмотреть модуль передаточной функции $G(j\omega)$ и аргумент (сдвиг по фазе). Тогда для

$$G(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \tag{3.19}$$

получим

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)} \tag{3.20}$$

и

$$\psi(\omega) = \operatorname{Arg}[G(\omega)] = \operatorname{arctg}\frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}. \tag{3.21}$$

Выход $x(t)$ линейной системы будет иметь ту же частоту, что и вход $y(t)$, если $y(t)$ — чисто синусоидальный входной сигнал с единственной частотой ω. В таком случае амплитуда $x(t)$ в $|G(j\omega)|$ раз больше входного сигнала $y(t)$, а ее фаза смещена на величину $\psi(\omega)$ относительно $y(t)$, так что для

$$y(t) = M\sin(\omega t) \tag{3.22}$$

получаем

$$x(t) = N\sin(\omega t + \psi), \tag{3.23}$$

где

$$\frac{N}{M} = |G(j\omega)| \tag{3.24}$$

и

$$\psi = \operatorname{Arg}[G(j\omega)]. \tag{3.25}$$

Частотная характеристика $G(j\omega)$ определяется путем подачи синусоидальных входных сигналов $M\sin(\omega t)$ на различных частотах ω и записи соответствующих выходных сигналов $N\sin(\omega t+\psi)$. С целью получения необходимой частотной характеристики величины M/N и ψ определяются для каждой рассматриваемой частоты ω.

Таким образом, метод преобразований Фурье используется для анализа в случае синусоидальных входных сигналов. Теоретически преобразования Фурье неприменимы для несходящихся входных сигналов $y(t)$, когда $\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|\,dt \to \infty$. Однако в разд. 3.1 уже говорилось, что синусоидальный входной сигнал можно рассматривать как несколько демпфированный, т. е.

$$y(t) = \sin(\omega t)\,e^{-\sigma t}, \tag{3.26}$$

где σ — малая положительная величина.

Амплитудные частотные характеристики, которые широко используются в классической теории управления [8], состоят из

амплитудной и фазовой (частотной) характеристик. Поэтому в общем случае $G(j\omega)$ является комплексной величиной. Если построить модуль измеренной частотной характеристики устойчивой линейной системы в единицах $20\lg|G(j\omega)|$ в зависимости от $\lg(\omega)$, то можно непосредственно идентифицировать эту систему. Ограничение случаев устойчивых систем имеет не только теоретический, но и практический смысл, так как в неустойчивых системах частотные характеристики нельзя измерить. Общая форма выражения для $G(s)$ имеет вид

$$\frac{\alpha_m s^m + \alpha_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \alpha_0}{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_0} = \frac{Ks^q \prod_{i=1}^{p} (\tau_i s + 1) \prod_{\rho=1}^{r} \left(T_\rho^2 s^2 + 2T_\rho \xi_\rho s + 1\right)}{s^\mu \prod_{h=1}^{\nu} (\tau_h s + 1) \prod_{\eta=1}^{\lambda} \left(T_\eta^2 s^2 + 2T_\eta \xi_\eta s + 1\right)}, \quad (3.27)$$

где $q+p+2r=m$ — порядок полинома s в числителе, а $\mu+\nu+2\lambda=n$ — порядок полинома s в знаменателе. Тогда $\lg|G(j\omega)|$ и $\operatorname{Arg}[G(j\omega)]$ определяются выражениями

$$\lg|G(j\omega)| = \lg K + q\lg\omega + \sum_{i=1}^{p} \lg|j\tau_i\omega + 1| + \sum_{\rho=1}^{r} \lg\left|1 - \omega^2 T_\rho^2 + 2jT_\rho \xi_\rho \omega\right| - \mu\lg\omega - \sum_{h=1}^{\nu} \lg|j\tau_h\omega + 1| - \sum_{\eta=1}^{\lambda} \lg\left|1 - \omega^2 T_\eta^2 + 2T_\eta \xi_\eta \omega\right|, \quad (3.28)$$

$$\operatorname{Arg}[G(j\omega)] = \psi(\omega) = q(\pi/2) + \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Arg}(j\tau_i\omega + 1) + \sum_{\rho=1}^{r} \operatorname{Arg}\left(1 - \omega^2 T_\rho^2 + 2jT_\rho \xi_\rho \omega\right) - \mu(\pi/2) - \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{Arg}(j\tau_h\omega + 1) - \sum_{\eta=1}^{\lambda} \operatorname{Arg}\left(1 - \omega^2 T_\eta^2 + 2T_\eta \xi_\eta \omega\right). \quad (3.29)$$

(Отметим, что для всех A и B $\operatorname{Arg}(A\cdot B)=\operatorname{Arg}A+\operatorname{Arg}B$, $\operatorname{Arg}(A/B)=\operatorname{Arg}A-\operatorname{Arg}B$, а для всех вещественных значений D $\operatorname{Arg}jD=\operatorname{Arg}j+\operatorname{Arg}D=\pi/2+\operatorname{Arg}D=\pi/2$.

Из уравнений (3.28) и (3.29) следует, что передаточную функцию $G(s)$ можно представить в виде произведения передаточных функций звеньев k_i, $(\tau_i s+1)$, $(T_i^2 s^2+2T_i\xi_i s+1)$, $s^{\pm\upsilon}$, $1/(\tau_j s+1)$, $1/(T_j^2 s^2+2T_j\xi_j s+1)$. Можно получить приближенные выражения для амплитудных частотных характеристик этих звеньев, как показано в табл. 3.1.

$$1\ \text{дБ}=20\ \lg 10,\ \text{декада} \overset{\Delta}{=} \text{декада по } \omega,$$

$$T_i^2 s^2+2\xi T_i s+1 \overset{\Delta}{=} s^2/\omega_i^2+2\xi s/\omega_j+1.$$

Логарифмическая частотная характеристика звена $(T_i^2 s^2+2\xi T_i s+1)^{\pm 1}$ при различных ξ представлена на рис. 3.3. Фазо-

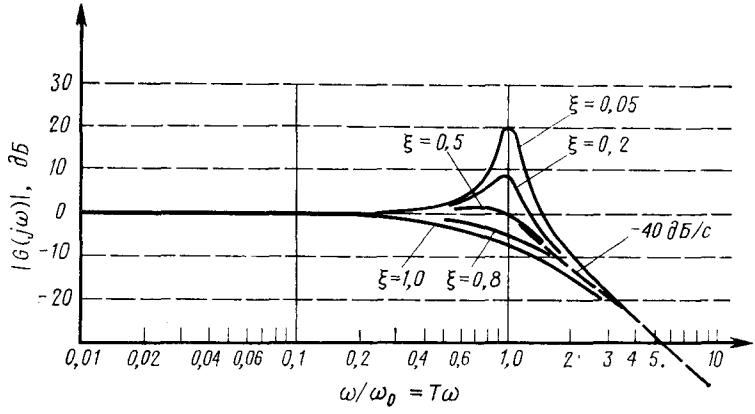


Рис. 3.3. Амплитудная частотная характеристика системы второго порядка.

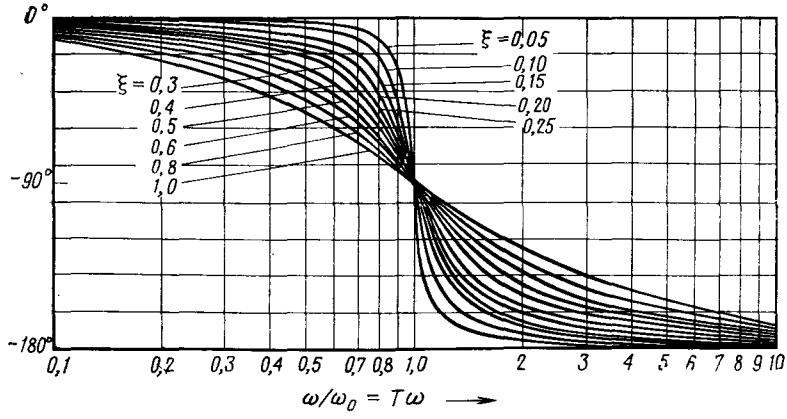


Рис. 3.4. Фазовая частотная характеристика системы второго порядка.

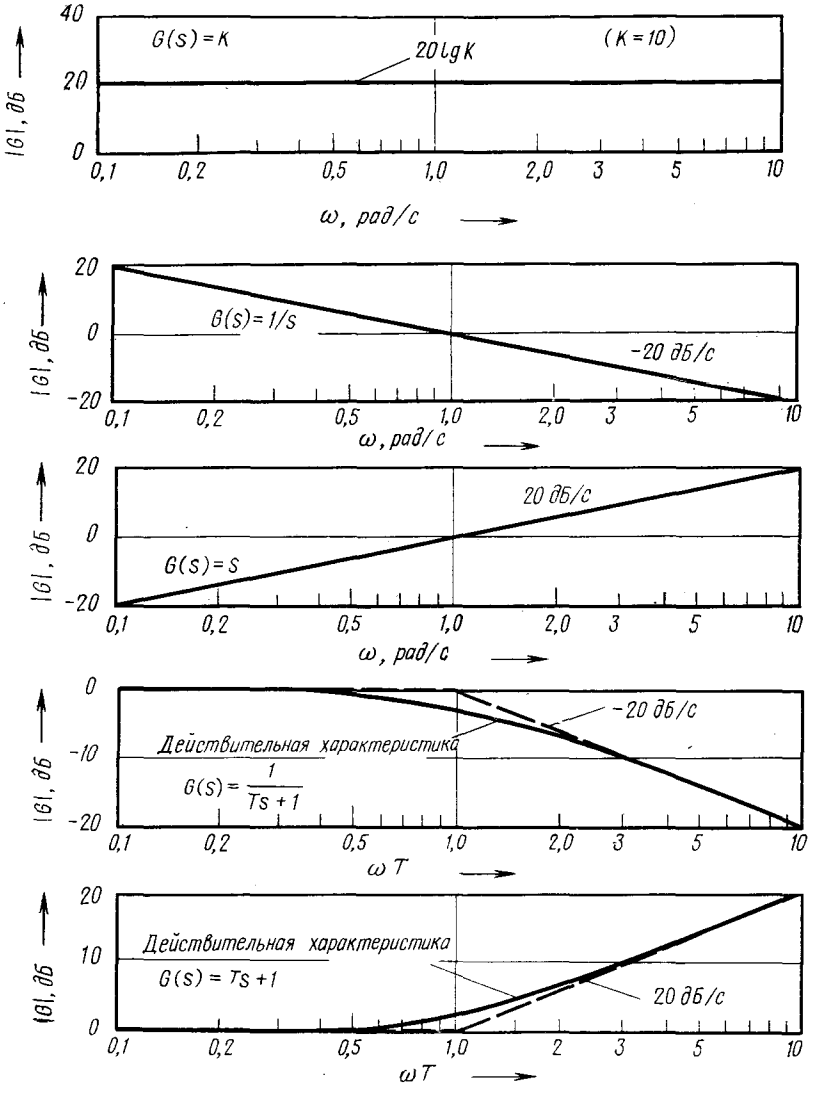


Рис. 3.5. Амплитудные частотные характеристики различных звеньев.

Таблица 3.1

Амплитудные частотные характеристики

Звено	$\omega \ll 1/T$	$\omega = 1/T$	$\omega \gg 1/T$
K	20 lg K [дБ]	20 lg K [дБ]	20 lg K [дБ]
s^n	n·20 [дБ/дек.]	n·20 [дБ/дек.]	n·20 [дБ/дек.]
$Ts+1$	0 [дБ]	+3 [дБ]	+20 [дБ/дек.]
$\frac{1}{Ts+1}$	0 [дБ]	—3 [дБ]	—20 [дБ/дек.]
$T^2s^2+2T\xi s+1$	0 [дБ]	В зависимости от ξ	+40 [дБ/дек.]
$\frac{1}{T^2s^2+2T\xi s+1}$	0 [дБ]	То же	—40 [дБ/дек.]
$\exp(-Ts)$	0 [дБ]	0 [дБ]	0 [дБ]

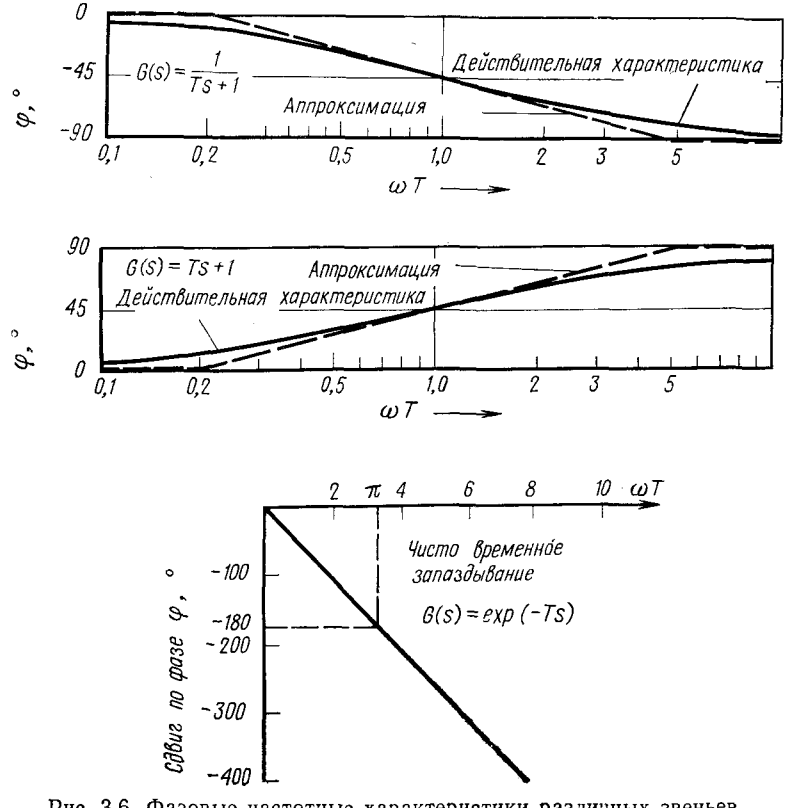


Рис. 3.6. Фазовые частотные характеристики различных звеньев.

Таблица 3.2

Фазовые частотные характеристики

Звено	$\omega \ll T^{-1}$	$\omega = T^{-1}$	$\omega \gg T^{-1}$
K	0^0	0^0	0^0
$s^{\pm n}$	$\pm 90^0$ n	$\pm 90^0$ n	$\pm 90^0$ n
$Ts+1$	0^0	45^0	90^0
$\frac{1}{Ts+1}$	0^0	-45^0	-90^0
$T^2s^2+2T\xi s+1$	0^0	90^0	180^0
$\frac{1}{T^2s^2+2T\xi s+1}$	0^0	-90^0	-180^0
e^{-Ts} (число временное запаздывание)	$-T\omega \frac{180^0}{\pi}$	$-T\omega \frac{180^0}{\pi}$	$-T\omega \frac{180^0}{\pi}$

вая частотная характеристика может быть аппроксимирована так, как в табл. 3.2.

Аргумент для звена с передаточной функцией $(T_i^2 s^2+2\xi T_i s+1)^{\pm 1}$ при $\omega=1/T$ также зависит от ξ, как показано на рис. 3.4.

Частотные характеристики различных звеньев, указанных в табл. 3.1 и 3.2, представлены на рис. 3.5 и 3.6 для модуля и аргумента (фазы) соответственно. Из сказанного выше следует весьма важный вывод, что частотные характеристики звеньев первого и второго порядков можно построить в функции нормированной частоты $T\omega$ или $\tau\omega$, устранив тем самым их зависимость от величины T.

Амплитудные аппроксимации, предложенные в табл. 3.1 и 3.2, позволяют осуществить приближенную идентификацию любой устойчивой линейной системы $G(j\omega)$ по ее измеренной частотной характеристике. Идентификацию можно провести с использованием только амплитудной частотной характеристики, если все коэффициенты полинома s в числителе $G(s)$ из уравнения (3.27) имеют один и тот же знак. В противном случае для идентификации необходимы амплитудная и фазовая частотные характеристики. Идентификацию с использованием частотных характеристик можно проиллюстрировать на следующем примере.

Пример 3.1

Рассмотрим амплитудную частотную характеристику, приведенную на рис. 3.7. Наклон характеристики при малых значениях частоты указывает, что передаточная функция $G(s)$ содержит

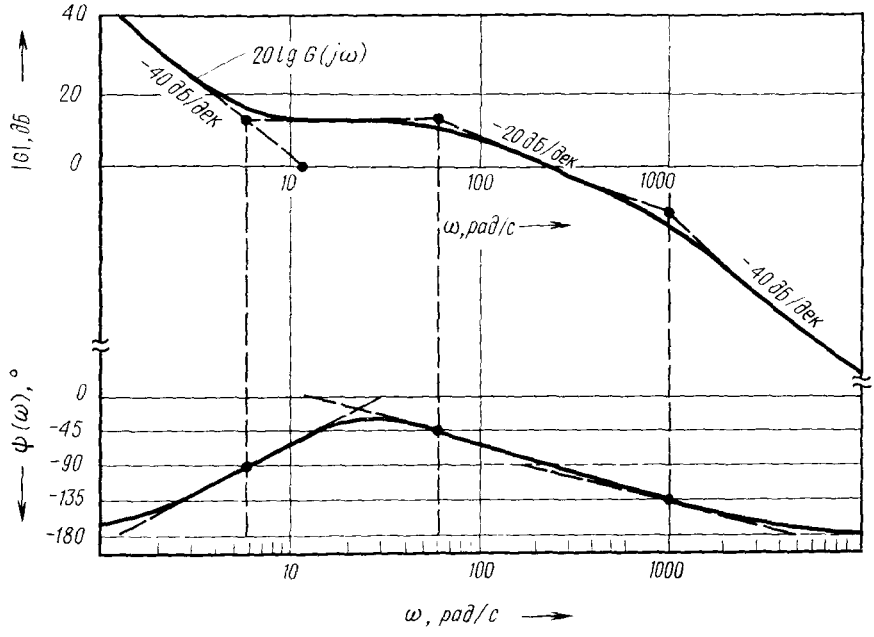


Рис. 3.7. Идентификация по частотным характеристикам.

звено s^{-2} (производная при низких частотах $-20 \cdot n = -40$ дБ/дек.). При $\omega_1 = 1/T_1 = 6$ имеется точка изгиба, соответствующая звену второго порядка $(T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1)$, причем величина ξ_1, по-видимому, близка к 1 ввиду малого амплитудного усиления вблизи ω_1 (рис. 3.3). Изменение наклона из-за последнего звена при $\omega_1 \ll 1/T$ составляет 0 дБ/дек., а при $\omega \gg 1/T_1$ соответствующее изменение наклона равно +40 дБ/дек., так что отрицательный наклон из-за звена s^{-2} компенсируется. Отметим, однако, что постепенное и медленное изменение наклона при $\omega_1 = 1/T_1$ указывает на то, что $\xi_1 > 1$, тогда как характер изменения амплитуды на той же частоте соответствует $\xi_1 < 1$. При $\omega_2 = 1/T_2 = 60$ наклон изменяется от 0 до -20 дБ/дек., что соответствует звену первого порядка $1/(T_2 s + 1)$. При частотах, превышающих $1/T_3 = 1000$, наклон уменьшается еще на 20 дБ/дек., указывая, таким образом, на присутствие звена $1/(T_3 s + 1)$. Следовательно, передаточную функцию $G(s)$ можно представить в виде произведения передаточных функций указанных выше звеньев, т. е.

$$G(s) = \frac{K(T_1 s + 1)^2}{s^2 (T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}.$$

Во всех случаях, когда ξ значительно отличается от 1, необходимо изучать эти случаи согласно рис. 3.3. Точнее, нужно анализировать зеркальное отображение этого рисунка, так как в нашем примере имеется звено $(T^2s^2+2\xi Ts+1)$, а в случае рис. 3.3 имело место звено с обратной передаточной функцией. Коэффициент K в рассматриваемом примере определяется, если провести касательную к характеристике при низких частотах до пересечения с осью 0 дБ. Частота ω_0 в точке пересечения связана с коэффициентом усиления соотношением

$$\lg\left(\frac{K}{(j\omega_0)^n}\right)=0. \tag{3.30}$$

Поэтому

$$\frac{K}{\omega_0^n}=1 \tag{3.31}$$

и

$$K=\omega_0^n=12^2=144. \tag{3.32}$$

В итоге передаточная функция в примере 3.1 определится соотношением

$$G(s)=\frac{144\,(T_1s+1)^2}{s^2\,(T_2s+1)\,(T_3s+1)}=\frac{144\,(0{,}167s+1)^2}{s^2\,(0{,}0167s+1)\,(0{,}001s+1)}.$$

После того как получено выражение для $G(s)$, можно составить уравнение состояния системы (т. е. описание системы в форме дифференциальных уравнений), используя результаты разд. 2.5.

Для получения $G(s)$ выше была использована только амплитудная частотная характеристика. Однако эту же характеристику можно использовать и для определения функции $G'(s)=K(T_1s-1)^2/[s^2(T_2s+1)(T_3s+1)]$. Поэтому для установления различия между $G(s)$ и $G'(s)$ необходима фазовая частотная характеристика.

3.3. Идентификация с помощью переходной функции

Простейшим входным сигналом, используемым при идентификации, является ступенчатый сигнал. Такой сигнал на входе системы может быть сформирован, например, путем внезапного открывания (или закрывания) входного клапана, включения (или выключения) управляющего напряжения или тока и т. д., так как это почти всегда возможно без применения специальной аппаратуры. У идеального ступенчатого сигнала время нарастания сигнала равно нулю, что физически невозможно, так как при этом скорость нарастания должна быть бесконечно большой. Следовательно, любой реальный ступенчатый входной сигнал является лишь аппроксимацией идеального ступенчатого сигнала. Однако если время нарастания сигнала гораздо меньше пе-

риода высшей гармоники, то ошибка идентификации становится незначительной. В процессах с помехами или в случаях, когда измерения содержат шум (что обычно имеет место на практике в той или иной степени), необходима соответствующая фильтрация шума.

Как уже отмечалось раньше в этой главе, идентификация с помощью переходной функции проводится автономно, вне процесса управления, и поэтому применима только к стационарным процессам. Однако поскольку ступенчатые возмущения воздействуют на многие (если не на большинство) системы во время включения или в процессе нормальной работы, то переходные функции можно записать, не нарушая нормального режима работы системы. В этом заключается дополнительное преимущество рассматриваемого метода. Очевидно, при этом необходимо предположить, что система стационарная, так как результаты идентификации считаются достоверными и после приложения ступенчатого сигнала. Кроме того, предполагается, что в диапазоне амплитуд ступенчатого сигнала система линейна.

3.3.1. Анализ переходной функции

Зависимость между входным сигналом, характеристиками процесса и выходным сигналом во времени представляет собой свертку, как показано в уравнении (3.4). Однако в форме преобразования Лапласа эта зависимость упрощается до произведения [уравнение (3.6)]. Поэтому преобразование Лапласа можно использовать для анализа переходной функции системы.

Рассмотрим систему с передаточной функцией $G(s)$:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}, \tag{3.33}$$

где s — переменная преобразования Лапласа, а X и Y — выходной и входной сигналы системы соответственно (см. рис. 3.1). Преобразование Лапласа для единичного ступенчатого сигнала при $t=0$ есть [9]

$$L[\text{Единичный ступенчатый сигнал при } t = 0] = \frac{1}{s}. \tag{3.34}$$

Тогда переходная функция $X(s)$ линейной системы равна

$$X(s) = \frac{G(s)}{s}, \tag{3.35}$$

что, согласно теории преобразования Лапласа, представляет собой преобразование интеграла $\int g(t)\,dt$, где $g(t)$ обозначает обратное преобразование Лапласа передаточной функции $G(s)$:

$$g(t) = L^{-1}[G(s)], \tag{3.36}$$

$$sX(s) = G(s), \tag{3.37а}$$

$$L^{-1}[sX(s)] = \frac{dx(t)}{dt} = g(t). \tag{3.37б}$$

3.3.2. Преобразование Фурье для переходной функции

Уравнения (3.34) и (3.37) можно непосредственно использовать для идентификации по переходной функции. Отметим, что *для уравнения необходима такая идентификация, которая обеспечивает информацию, достаточную для соответствующего адекватного прогнозирования состояния системы в некоторый момент времени* $(t+\tau)$, в предположении, что текущее состояние и управление заданы. Поэтому, зная требуемое состояние при $t+\tau$, можно с использованием результатов идентификации вычислить необходимое управление для того, чтобы достичь будущего требуемого состояния. Кроме того, для эффективности идентификации интервал τ должен быть таким, чтобы при $t+\tau$ можно было бы снова произвести идентификацию и вычислить новое управление на следующем интервале. Очевидно, что наилучшей была бы такая идентификация, которая позволяет точно прогнозировать состояние в любой будущий момент времени $t+\tau$ $(\tau\to\infty)$, но практически это невозможно. В стационарных системах знание передаточной функции $G(s)$ или переходной матрицы **A** и матрицы управления **B** из уравнения (2.1) теоретически облегчают идентификацию с любым упреждением по времени ($G(s)$, **A** и **B** взаимосвязаны, как в разд. 2.5). Рассматривая уравнения (3.34) и (3.37), отметим, что $x(t)$ или $dx(t)/dt$ можно преобразовать в форму передаточной функции $G(s)$, используя преобразование Фурье (или, еще лучше, алгоритм быстрого преобразования Фурье [3, 4]). Применение преобразования Фурье подробно обсуждалось в разд. 3.1. Однако для полноты изложения допустим, что если $dx(t)/dt$ преобразуется в $F[g(t)]=G(j\omega)$ (где F — оператор преобразования Фурье), то можно представить графически зависимость $G(j\omega)$ от ω. Заметим, что характеристика $G(j\omega)$ комплексная, поэтому необходимо рассматривать амплитудную и фазовую характеристики. Анализируя поведение $G(j\omega)$, можно определить $G(s)$ точно таким же способом, как и в разд. 3.2, а затем построить модель системы в пространстве состояний согласно разд. 2.5. Видно, что можно применить преобразование Фурье к $dx(t)/dt$ и получить $G(j\omega)$ или применить к $x(t)$ и получить $X(j\omega)$, после чего определить характеристику $G(j\omega)$. Теоретически преобразование Фурье ограничено случаями абсолютно интегрируемых функций времени [10], о которых говорилось выше. Как уже отмечалось в разд. 3.1, это ограничение создает определенные теоретические трудности, когда для идентификации применяется преобразование Фурье.

Следующий пример иллюстрирует применение преобразования Фурье для идентификации с использованием переходных функций.

Пример 3.2

Расмотрим систему с передаточной функцией $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}.$$

Переходная функция $X(s)$ системы определяется выражением

$$X(s) = \frac{1}{s(Ts+1)},$$

а обратное преобразование Лапласа этого выражения дает

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = 1 - e^{-t/T}.$$

Для определения передаточной функции системы $G(s)$ можно записать

$$sx(s) = \frac{1}{Ts+1} = G(s),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}.$$

Так как $e^{-t/T}$ — величина сходящаяся, то к ней можно применить преобразование Фурье:

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = G(j\omega).$$

Отметим, что величина $g(t)$ равна 0 при $t \leqslant 0$ и $e^{-t/T}$ при $t > 0$.

Следовательно, интеграл в преобразовании Фурье можно переписать следующим образом:

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{T} e^{-t/T} e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega T+1)t/T}\, dt = -\frac{1}{j\omega T+1} e^{-(j\omega T+1)t/T} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{j\omega T+1}.$$

Это дает при $j\omega = s$

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1},$$

что и требовалось.

Аналогично, находя преобразование $x(t)$ вместо $dx(t)/dt$, получим для задачи в рассмотренном выше примере

$$X(j\omega) = \int_{\infty}^{0} 0 \cdot e^{-j\omega T}\, dt + \int_{0}^{\infty} (1 - e^{-t/T})\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-j\omega t}\,dt - \int_0^\infty e^{-(j\omega T+1)t/T}\,dt =$$

$$= \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_0^\infty + \frac{T}{j\omega t+1} e^{-(j\omega t+1)t}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{j\omega} - \frac{T}{j\omega T+1} = \frac{j\omega T+1-j\omega T}{j\omega\,(j\omega T+1)} = \frac{1}{j\omega\,(j\omega T+1)}.$$

Однако преобразование Фурье единичной ступенчатой функции дает приблизительно $1/j\omega$. (Мы говорим «приблизительно», потому что ступенчатая функция не является абсолютно интегрируемой [1] и ее интеграл по времени от $-\infty$ до ∞ бесконечен.) Следовательно, если такую функцию представить в виде $e^{-\sigma t}\ \forall t>0$ (где σ — положительная величина, очень близкая к 0), то получим

$$F \simeq \int_{-\infty}^0 0\cdot e^{-j\omega t}\,dt + \int_0^\infty e^{-\sigma t}\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sigma+j\omega} e^{-(\sigma+j\omega)t}\Big|_0^\infty \to \frac{1}{\sigma+j\omega} = \frac{1}{j\omega}, \qquad (3.38)$$

где F — единичная ступенчатая функция t.

Применяя теорему о свертке

$$X(j\omega) = G(j\omega)\,Y(j\omega), \qquad (3.39)$$

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)}, \qquad (3.40)$$

где $X(j\omega)$ и $Y(j\omega)$ — выходной и входной сигналы соответственно (см. рис. 3.1), и учитывая на основе уравнения (3.38), что преобразование входного сигнала из примера 3.2 равно

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega},$$

получим

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega\,(j\omega T+1)} = \frac{1}{j\omega T+1},$$

что соответствует результату, полученному в рассмотренном выше примере.

3.3.3. Графическая идентификация с помощью переходной функции

Во многих случаях для определения передаточной функции системы можно использовать запись ее переходной функции. Такой способ, обсуждаемый ниже, применим к большинству типов линейных систем, а именно к системам первого и второго порядков и к апериодическим системам высшего порядка.

3.3.3а. Системы первого порядка. Наиболее корректно графический метод идентификации с использованием переходных функций применяется к процессам первого порядка (рис. 3.8).

Переходная функция системы первого порядка имеет вид

$$x(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right) \tag{3.41}$$

или в форме преобразования Лапласа

$$X(s) = L[x(t)] = G(s)\,Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{K}{s(Ts+1)}, \tag{3.42}$$

где

$$G(s) = K/(Ts+1) \tag{3.43}$$

есть передаточная функция системы первого порядка, а

$$Y(s) = 1/s = L\,[\text{единичная ступенька}] \tag{3.44}$$

является изображением ступенчатого входного сигнала. Видно, что при $t=T$ функция $x(t)$ равна

$$x(t) = K(1 - e^{-1}) = K(1 - 0{,}37) = 0{,}63K. \tag{3.45}$$

Постоянная времени T системы первого порядка равна отрезку времени, за которое переходная функция достигает 63% своей

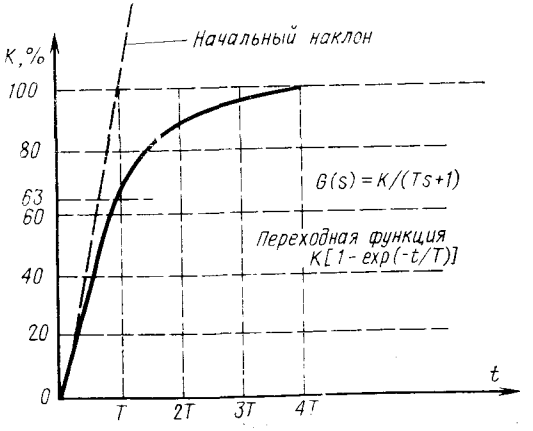


Рис. 3.8. Переходная функция системы первого порядка

установившейся величины. Коэффициент K (обычно имеющий размерность) представляет собой соотношение между установившейся величиной выходного сигнала системы и амплитудой входа.

Постоянную времени T можно определить по-другому, если провести касательную к переходной функции на начальном участке (при $t=0$) до точки пересечения с уровнем установившейся величины сигнала, как показано на рис. 3.8. Точка пересечения соответствует времени T с момента подачи входного воздействия, так как наклон кривой x при $t=0$ равен

$$\frac{dx}{dt_{t=0}} = \frac{K}{T} e^{-t/T}\Big|_{t=0} = K/T. \tag{3.46}$$

Изменение наклона во времени выражается следующим образом:

$$\Phi(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{+Kt}{T}. \tag{3.47}$$

При $t=T$ наклон достигает величины K.

3.3.3б. Чисто временно́е запаздывание. Если переходная функция запаздывает на время τ, т. е. равна 0 в течение промежутка времени τ после приложения ступенчатого воздействия, как показано на рис. 3.9, то система имеет чисто временно́е запаздывание, для которого преобразование Лапласа есть $e^{-\tau s}$. Следовательно, если переходная функция системы равна

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \leqslant \tau, \\ K\left(1 - e^{-(t-\tau)/T}\right), & \forall t > \tau, \end{cases} \tag{3.48}$$

то передаточная функция системы получается в виде

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts+1}. \tag{3.49}$$

3.3.3в. Апериодические системы второго порядка. В работах [11, 12] рассмотрен графический метод идентификации системы по переходной функции, позволяющий определить параметры

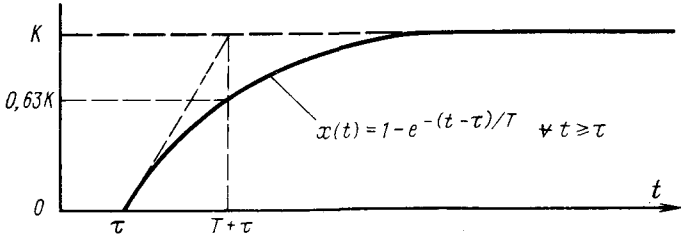


Рис. 3.9. Переходная функция системы с чисто временны́м запаздыванием.

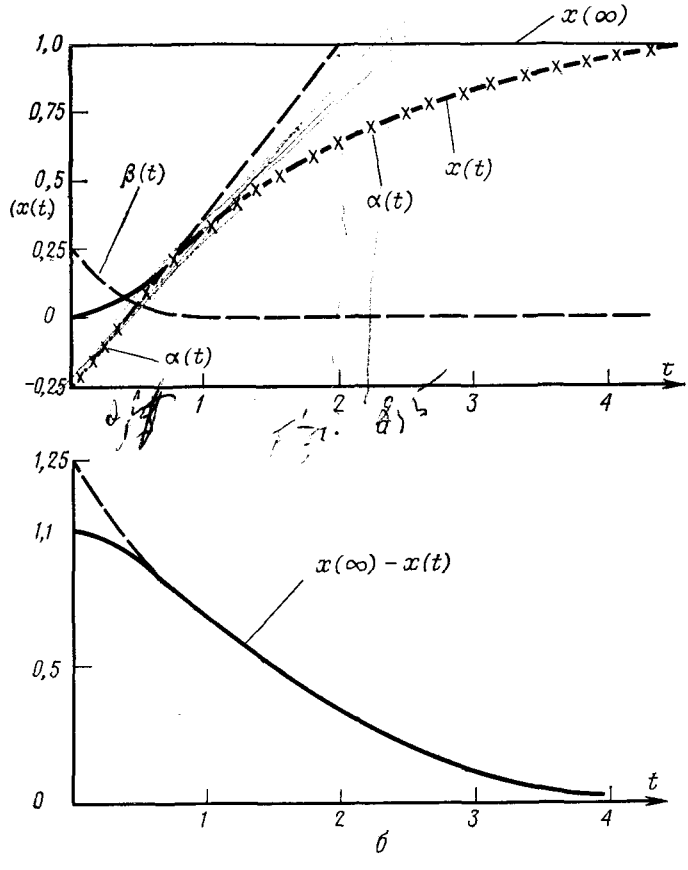


Рис. 3.10. Переходные функции апериодических систем второго порядка.

передаточной функции второго порядка для этой системы. Рассмотрим систему с передаточной функцией $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1,25}{(s+2,5)(s+0,5)},$$

переходная функция которой имеет вид

$$x(t) = 1 - 1,25e^{-0,5t} + 0,25e^{-2,5t},$$

как показано на рис. 3.10, *а*.

График изменения разности $x(\infty) - x(t)$ для рассматриваемой системы изображен на рис. 3.10, *б*. Заметим, что

$$x(\infty) - x(t) = 1 - x(t) = 1,25e^{-0,5t} - 0,25e^{-2,5t}.$$

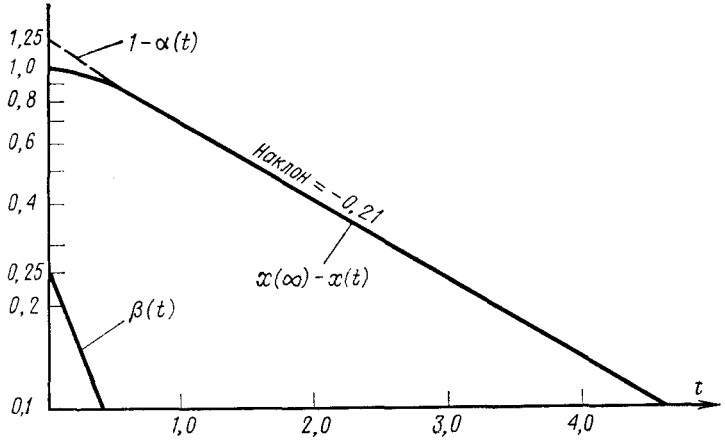


Рис. 3.11. Логарифмическая переходная функция апериодической системы второго порядка.

Для вычисления наклона единица ординаты равна lg 10, т. е. 1 дек.

Поэтому при больших значениях t, когда $e^{-2,5t}\to 0$, член $[x(\infty)-x(t)]$ может быть заменен на $1{,}25e^{-0,5t}$, как показано на рис. 3.10, *а*, а наклон графика $\lg[x(\infty)-x(t)]$ (рис. 3.11) приблизительно равен

$$\frac{d\left[\lg\left(1{,}25e^{-0,5t}\right)\right]}{dt}=\frac{d\left[\lg 1{,}25-0{,}5t\lg e\right]}{dt}=-0{,}5\lg e=-0{,}21.$$

Поэтому $x(t)$ при больших значениях t можно аппроксимировать выражением $\alpha(t)=(1-1{,}25e^{-0,5t})$, тогда как при малых значениях t требуется использовать и член $\beta(t)$, который при $t=0$ должен быть равен $\beta(0)=0{,}25$. Этот член, таким образом, записывается в виде $\beta(t)\stackrel{\Delta}{=}0{,}25^{-rt}$. Возвратимся к рис. 3.10, *а* и построим зависимость $\alpha(t)\stackrel{\Delta}{=}(1-1{,}25e^{0,5t})$, отметив, что $\alpha(0)=-0{,}25$. От точки $\alpha(0)$ продолжим линии с начальным наклоном $d\alpha(0)/dt=0{,}625$ и плавно соединим ее с графиком $x(t)$. Разность между $x(t)$ и $\alpha(t)$ равна (приблизительно) $\beta(t)$; она изображена на рис. 3.10, *а*. На рис. 3.11 приведен график $\lg\beta(t)$. Наклон графика $\lg\beta(t)$ на рис. 3.11 определяется выражением

$$\frac{d\left[\lg\beta(t)\right]}{dt}=\frac{d\left[\lg 0{,}25e^{-rt}\right]}{dt}=\frac{d\left[\lg 0{,}25-rt\lg e\right]}{dt}=-r\lg e=-0{,}42r,$$

из которого можно определить $r\simeq 2{,}5$. Тогда $x(t)$ аппроксимируется выражением

$$1-1{,}25e^{-0,5t}+0{,}25e^{-rt},$$

а функция $G(s)$ принимает вид

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+r)} = \frac{K}{(s+0{,}5)(s+r)}.$$

Величина K определяется таким образом, чтобы она соответствовала установившейся величине $x(t)$, где

$$X(s) = G(s)/s \tag{3.50}$$

есть переходная функция. По теореме о конечном значении имеем

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{s} = \frac{K}{ar}. \tag{3.51}$$

Поскольку, как было отмечено, $x(0)=1$, получаем $K=0{,}5r$, а величина r уже была определена выше.

3.3.3г. Колебательные системы второго порядка. Передаточные функции периодических (колебательных) систем могут быть представлены в виде

$$G(s) = \frac{K}{(s/\omega_0)^2 + 2\xi s/\omega_0 + 1} = \frac{K}{(Ts)^2 + 2\xi Ts + 1}, \tag{3.52}$$

где $0<\xi<1$, а $T \stackrel{\Delta}{=} 1/\omega_0$, как это хорошо известно из классической теории управления [8]. Следовательно, для идентификации колебательных систем второго порядка необходимо определить только величины ω_0, ξ и K, где K — отношение выходного и входного сигналов в установившемся состоянии.

Коэффициент демпфирования ξ непосредственно связан с *перерегулированием*, которое всегда имеется в колебательных системах второго порядка (рис. 3.12). Соотношение между коэффициентом демпфирования ξ и перерегулированием в процентах от установившейся величины переходной функции показано на рис. 3.13. Если коэффициент демпфирования ξ определяется графически в соответствии с рис. 3.13, то собственная частота системы ω_0 может быть определена следующим образом:

$$\omega_0 = \omega/\sqrt{1-\xi^2}, \tag{3.53}$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\theta}, \tag{3.54}$$

а θ — период демпфированных колебаний переходной функции (см. рис. 3.12).

3.3.3д. Апериодические системы высокого порядка. Простейший графический метод идентификации апериодических систем высокого порядка описан в работах [12, 13]. В этом методе используется понятие обобщенной переходной функции апериоди-

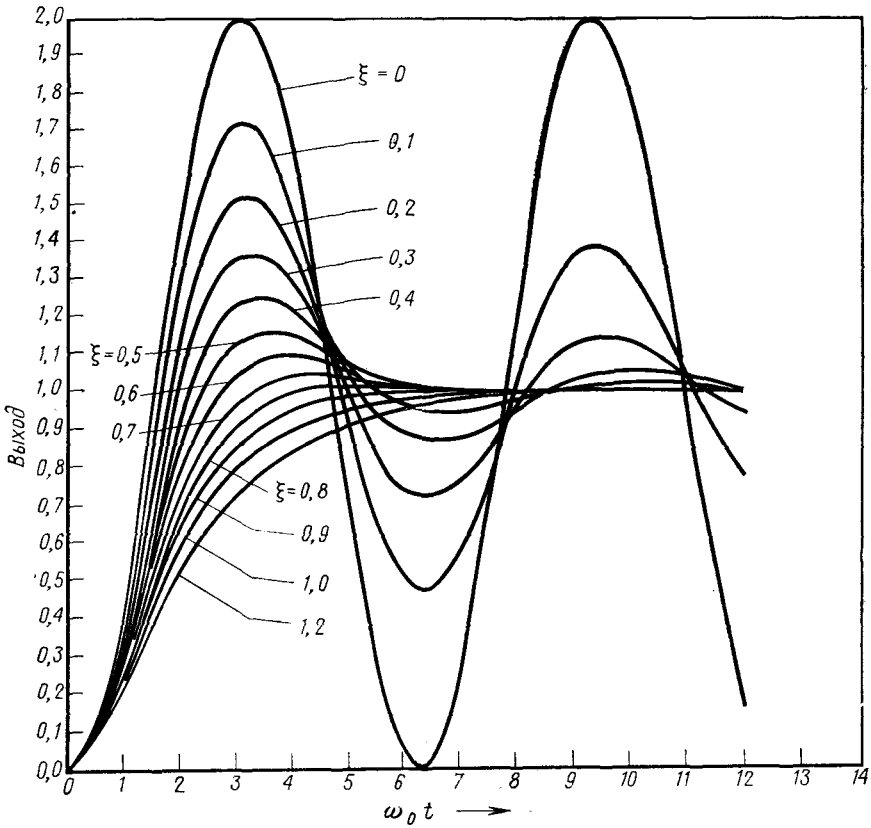


Рис. 3.12. Переходные функции колебательных систем второго порядка.

ческой системы высокого порядка (рис. 3.14). Согласно этому методу, передаточная функция с n различными постоянными времени может быть аппроксимирована передаточной функцией, имеющей n указанных постоянных времени:

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} \cong \frac{K}{(\tau s + 1)^n}, \qquad (3.55)$$

где K представляет собой коэффициент усиления системы в установившемся состоянии. Таким образом, задача идентификации сводится к определению τ и n. Для этой цели в работах [12, 13] составлены таблицы значений n, T_a/T_b и T_e/T_b, как в табл. 3.3. В точке перегиба на рис. 3.14, знать которую необходимо для определения T_a, ... , T_e, производная d^2x/dt^2 равна нулю. После определения степени n из T_a/T_b (и проверки по

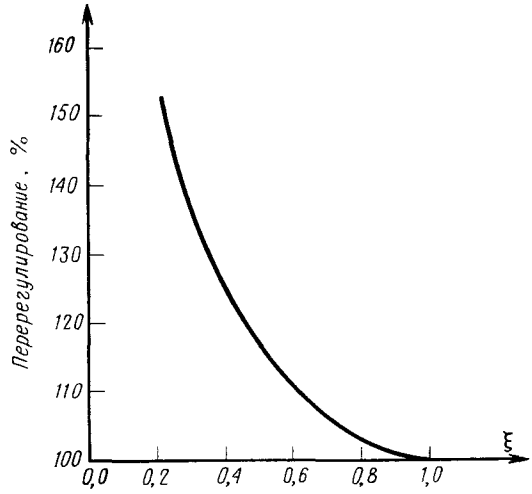


Рис. 3.13. Зависимость амплитуды от коэффициента демпфирования.

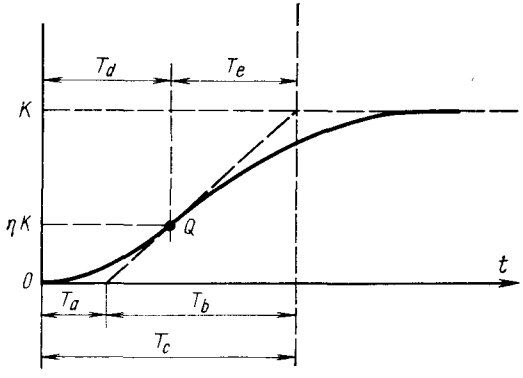


Рис. 3.14. Переходная функция апериодической системы высокого порядка.

Таблица 3.3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_a/T_b	0	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493	0,570	0,642	0,709	0,773
T_e/T_b	1	0,736	0,677	0,647	0,629	0,616	0,606	0,599	0,593	0,587
η	0	0,264	0,323	0,353	0,371	0,384	0,394	0,401	0,407	0,413

T_e/T_b) можно найти τ из уравнения (3.55) по величине T_a/τ (и проверить по T_b/τ, T_d/τ, T_e/τ) в соответствии с табл. 3.4.

Таблица 3.4

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_a/τ	0	0,282	0,805	1,425	2,1	2,811	3,549	4,307	5,081	5,869
T_b/τ	1	2,718	3,695	4,463	5,119	5,699	6,226	6,711	7,164	5,59
T_d/τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_e/τ	1	2	2,5	2,888	3,219	3,51	3,775	4,018	4,245	4,458

3.4. Идентификация с помощью импульсной переходной функции

Процедура идентификации линейных систем с использованием их импульсных переходных функций очень похожа на процедуру идентификации с помощью переходных функций. Для такой идентификации требуется приложить импульсный сигнал (дельта-функцию) на вход идентифицируемой системы. Поэтому идентификация проводится вне процесса управления. По определению дельта-функция представляет собой импульс нулевой ширины с площадью, равной единице (рис. 3.15), и поэтому с бесконечной амплитудой. Очевидно, дельта-функция не может быть практически реализована. Однако ее можно аппрок-

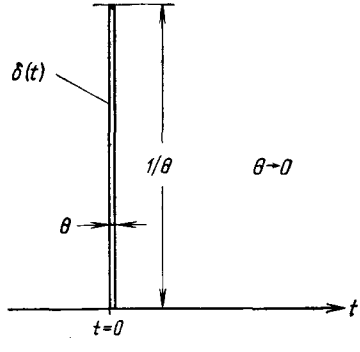


Рис. 3.15. Импульсная функция.

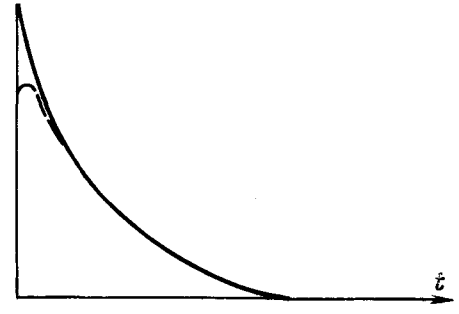


Рис. 3.16. Реакция системы на идеальный импульс и аппроксимированное воздействие.

— — — реакция на импульс ненулевой ширины с единичной площадью; _____ реакция на идеальный импульс с единичной площадью.

симировать импульсом с шириной $\theta \to 0$ и с площадью, равной единице. Амплитуда переходной функции $1/\theta$ будет стремиться к бесконечности. Ошибка по переходной функции показана на рис. 3.16.

3.4.1. Анализ импульсной переходной функции

Рассмотрим систему, представленную на рис. 3.1, с передаточной функцией $G(s)$. Для нее

$$X(s) = G(s)\,Y(s), \tag{3.56}$$

где x и y — выход и вход системы соответственно, причем y — единичный импульс. Преобразование Лапласа для единичного импульса дает

$$Y(s) = L[\delta(t)] = 1. \tag{3.57}$$

Тогда преобразование Лапласа для выхода записывается в виде

$$X(s) = G(s)\,L[\delta(t)] = G(s)\cdot 1 = G(s) \tag{3.58}$$

и

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[G(s)] = g(t). \tag{3.59}$$

Уравнения (3.58) и (3.59) означают, что импульсная переходная функция линейной системы идентична обратному преобразованию Лапласа ее передаточной функции $G(s)$. Этот результат очень важен для идентификации.

Однако если входной сигнал $y(t)$ является импульсом, ширина которого θ конечна и достаточно мала, то можно представить этот импульс в виде суммы положительной единичной ступенчатой функции при $t=0$ и отрицательной единичной ступенчатой функции при $t=\theta$, как показано на рис. 3.17. Тогда получим

$$L[y(t)] = Y(s) = \frac{1 - e^{-\theta s}}{s}, \tag{3.60}$$

где $1/s$ — преобразование Лапласа для единичной ступенчатой функции при $t=0$, $e^{-\theta s}/s$ — единичная отрицательная ступенчатая функция при $t=\theta$.

Используя разложение в ряд Тейлора, преобразуем уравнение (3.60) к виду

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\left(1 - s\theta + \frac{s^2\theta^2}{2} - \frac{s^3\theta^3}{3!} \pm \ldots\right) \tag{3.61}$$

и получим при $\theta \to 0$

$$Y(s) \cong \frac{1}{s} - \frac{1}{s}(1 - \theta s) = \theta. \tag{3.62}$$

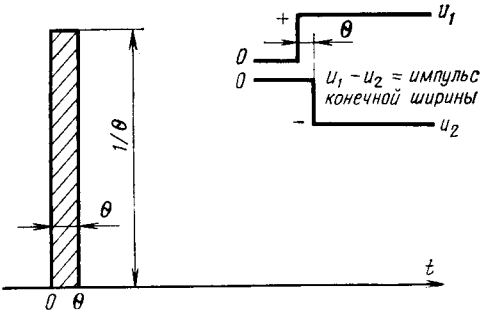


Рис. 3. 17. Импульс конечной ширины.

Если амплитуда импульса равна $1/\theta$, то $Y(s)$ в уравнении (3.62) принимает вид

$$Y(s) = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}(1 - \theta s)\right] = 1, \tag{3.63}$$

как и в случае с истинной δ-функцией.

Сравнивая рассмотренную выше импульсную функцию и ступенчатую функцию из разд. 3.3, можно установить, что δ-функция фактически является производной по времени идеальной ступенчатой функции (такая производная будет бесконечно большой при $t=0$ и равна нулю в другие моменты времени). Находя преобразование Лапласа и учитывая, что переменная преобразования Лапласа s есть производная по времени, получим

$$sL = s\frac{1}{s} = 1, \tag{3.64}$$

где L — единичная ступенчатая функция.

Следовательно, если $x(t)$ представляет собой переходную функцию системы, то dx/dt определяется выражением

$$sX(s) = s\frac{G(s)}{s} = G(s), \tag{3.65}$$

где $G(s)/s$ — переходная функция, как в уравнении (3.35). Сравнивая уравнения (3.58) и (3.65), можно заключить, что производная по времени переходной функции равна импульсной переходной функции системы. Кроме того, интеграл от импульсной переходной функции $(1/s)G(s)$ равен переходной функции. Таким образом, можно сделать вывод, что методы идентификации с использованием импульсных переходных функций можно применять и к переходным функциям, если они дифференцируемы. С другой стороны, методы идентификации с использованием

переходных функций можно применять к импульсным переходным функциям, если рассматривается интеграл по времени от такой функции.

3.4.2. *Преобразование Фурье для импульсных характеристик*

Так же, как и в методе идентификации с использованием переходных функций (разд. 3.3.2), передаточную функцию $G(s)$ можно определить с помощью преобразования Фурье импульсной переходной функции $g(t)$. После того как передаточная функция $G(s)$ получена, можно составить дифференциальные уравнения системы, как и в разд. 2.5.

Поскольку импульсная функция $\delta(t)$ интегрируема $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t)|dt = 1 < \infty\right)$, теоретически возможно применить преобразование Фурье к соответствующей переходной функции. Применяя преобразование Фурье, согласно уравнению (3.1), к $\delta(t)$, получим

$$F[\delta(t)] = Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t} dt = \lim_{\theta \to 0} \left[\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\theta} \frac{1}{\theta} e^{-j\omega t} dt + \int_{\theta}^{\infty} 0 \cdot dt \right] = \lim_{\theta \to 0} \left[0 + \int_{0}^{\theta} \frac{1}{\theta} e^{-j\omega t} dt + \right.$$

$$\left. + 0 \right] = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{j\omega\theta} \left[1 - \left(1 - j\omega\theta + \frac{(j\omega\theta)^2}{2!} \mp \ldots \right) \right] = 1. \tag{3.66}$$

С учетом уравнения (3.66) получим преобразование Фурье применительно к импульсной переходной функции $x(t)$:

$$X(j\omega) = G(j\omega)\, Y(j\omega) = G(j\omega) \cdot 1. \tag{3.67}$$

Следовательно, если построить график $X(j\omega)$ по ω, то можно получить частотную характеристику $G(j\omega)$ системы. Затем, используя $G(j\omega)$, можно получить $G(s)$ таким же частотным методом, как в разд. 3.2.

3.4.3. *Графическая идентификация с помощью импульсной переходной функции*

По аналогии с рассмотренным в разд. 3.3.3 методом идентификации, в соответствии с которым анализируется поведение переходной функции, можно осуществить идентификацию непосредственно по анализу поведения импульсной переходной

функции. Для этой цели следует проинтегрировать импульсную переходную функцию, в результате чего получается переходная функция.

С другой стороны, можно получить соотношения, подобные соотношениям разд. 3.3.3 для переходных функций; некоторые из них обсуждаются ниже.

3.4.3а. Системы первого порядка. Такие системы можно описать передаточной функцией

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}. \tag{3.68}$$

Тогда импульсная переходная функция записывается в виде

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = \frac{K}{T} e^{-t/T}. \tag{3.69}$$

График ее представлен на рис. 3.18. Таким образом, T и K определяются по графику: в начальной точке $K/T = (K/T)e^{-0/T}$, а время, при котором $g(t)$ достигает $0{,}37\,K/T$ $(= (K/T)e^{-T/T} = (K/T)e^{-1})$, равно T. Постоянную T можно получить также, проводя касательную из начала графика $g(t)$ до ее пересечения с осью времени, поскольку, согласно уравнению (3.69),

$$\frac{dg(0)}{dt} = -\frac{K}{T^2} \tag{3.70}$$

и

$$\frac{K}{T} - \frac{K}{T^2} t = 0 \quad \text{при} \quad t = T. \tag{3.71}$$

На практике входной сигнал в системе является некоторым приближением к импульсу, и $g(t)$ никогда не начинается с величины K/T. В этом случае K и T можно определить, как показано

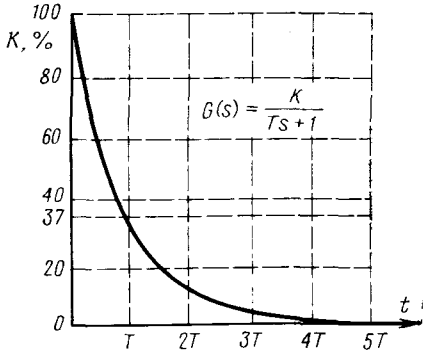


Рис. 3.18. Импульсная переходная функция системы первого порядка.

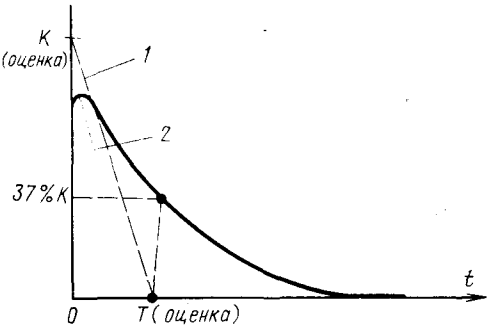


Рис. 3.19. Практический способ идентификации системы первого порядка по импульсной переходной функции.

1 — аппроксимация выражением $Ke^{-t/T}$; *2* — действительная характеристика.

на рис. 3.19, где максимальный наклон кривой *в окрестности* $t=0$ экстраполируется в обратном направлении к $t=0$ так, чтобы была достигнута величина K/T.

3.4.3б. Импульсные переходные функции колебательных систем второго порядка. Импульсные переходные функции колебательных систем второго порядка определяются следующим образом:

$$G(s) = \frac{K}{(s/\omega_0)^2 + 2\xi s/\omega_0 + 1}, \quad \forall 0 < \xi < 1, \tag{3.72}$$

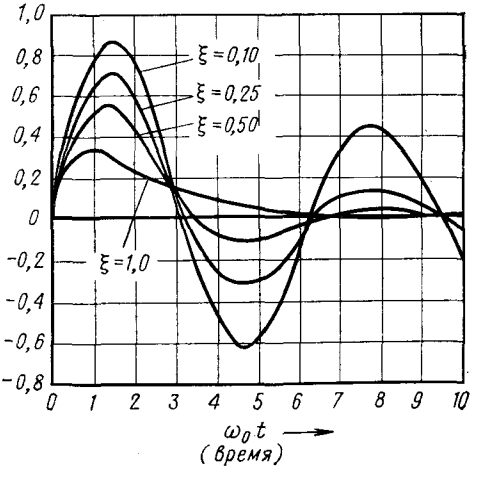


Рис. 3.20. Импульсные переходные функции периодических систем второго порядка.

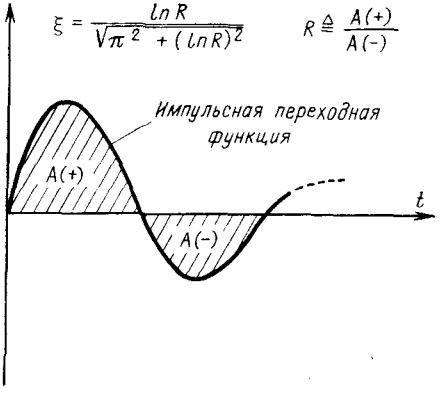


Рис. 3.21. Определение коэффициента ξ по отношению площадей.

$$g(t) = \frac{K}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_0 t \sqrt{1-\xi^2}. \tag{3.73}$$

Они представлены на рис. 3.20. Отсюда

$$\omega_0 \stackrel{\Delta}{=} \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \omega \stackrel{\Delta}{=} \frac{2\pi}{\theta}, \tag{3.74}$$

где θ — период одного колебания, а ξ определяется из соотношения [14]

$$\frac{A(+)}{A(-)} = e^{\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \stackrel{\Delta}{=} R, \tag{3.75}$$

т. е.

$$\xi = \frac{\ln R}{\sqrt{\pi^2 + (\ln R)^2}}, \tag{3.76}$$

где $A(+)$, $A(-)$ — *положительная и отрицательная последовательные* площади соответственно, ограниченные импульсной переходной функцией, как показано на рис. 3.21. После того как ξ и ω_0 определены, K можно найти из уравнения (3.73).

ЛИТЕРАТУРА

1. Miller K. S., Engineering Mathematics, Dover, New York, 1963.
2. Papoulis A., The Fourier Integral and Its Applications, McGraw-Hill, New York, 1962.
3. Cooley J. W., Tukey J. W., An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Jour. Math. Comput.*, **19**, pp. 297—301 (1965).
4. Singleton R. C., Algorithm 338 (Algol Procedures for the Fast Fourier Transform), and: Algorithm 339 (An Algol Procedure for the Fast Fourier Transform with Arbitrary Factors), Comm. ACM, pp. 773—779, 1968.

5. Brigham E. O., Morrow R. E., The Fast Fourier Tansform, *IEEE Spectrum*, 4, pp. 63—70, December 1967.
6. Nyquist H., Regression Theory, *Bell Sys. J.*, **11**, pp. 126—147 (1932).
7. Bode H. W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design, D. Van Nostrand, (Van Nostrand Reinhold), New York, 1945.
8. Wilts C. H., Principles of Feedback Control, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960.
9. Churchill R. V., Modern Operational Mathematics in Engineering, McGraw-Hill, New York, 1944.
10. Sokolnikoff I. S., Redheffer R. M., Mathematics of Physics and Modern Engineering, McGraw-Hill, New York, 1966.
11. Naslin P., Variable Arrangements in Linear and Nonlinear Systems, Dunod, Paris, 1962.
12. Chaussard R., Use of Methods of Transient Analysis and of the Criterion of Naslin for the Regulation of Thermal Power Station Boilers, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, **179**, Pt. 3H, pp. 74—81 (1965).
13. Strejc V., Approximate Determination of the Control Characteristics of an Aperiodic Response Process, *Automatisme* (March 1960).
14. Thaler G. J., Pastel M. P., Analysis and Design of Nonlinear Feedback Control Systems, McGraw-Hill, Ney York, 1967.

Задачи

1. Постройте амплитудную частотную характеристику для системы с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{4e^{-2s}(s+10)}{s(s^2+0,5s+0,3)(s+1)}.$$

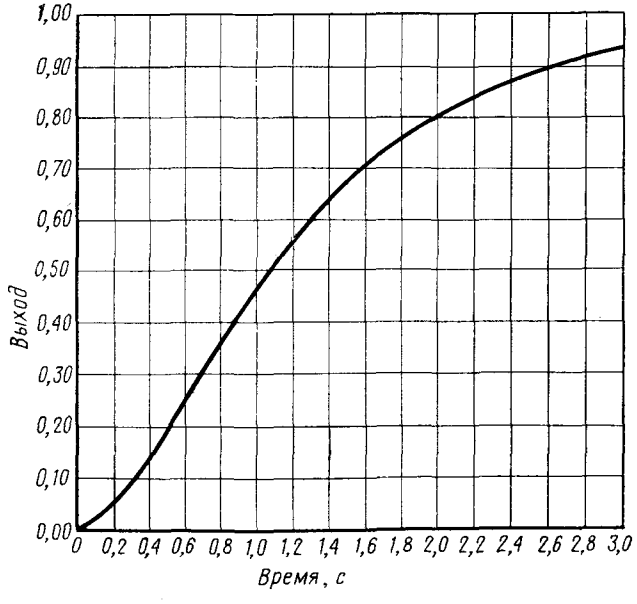


Рис. 3.22. Переходная функция системы второго порядка.

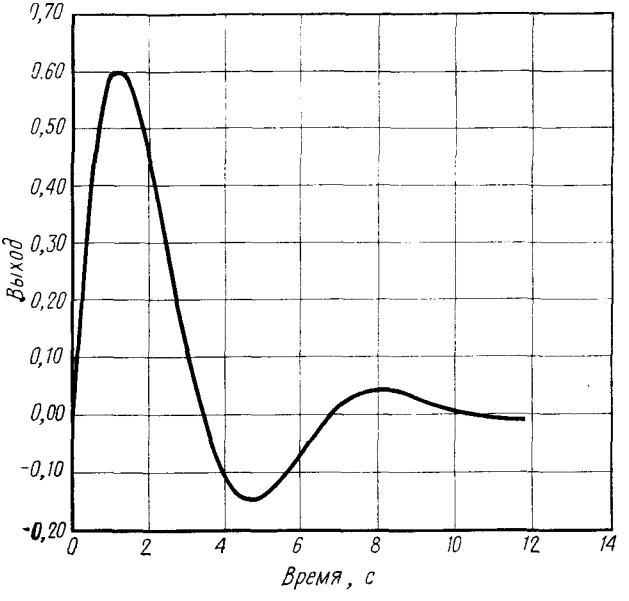


Рис. 3.23. Импульсная переходная функция системы второго порядка.

2. Идентифицируйте систему, переходная функция которой изображена на рис. 3.22, используя передаточную функцию второго порядка на основе метода из разд. 3.3.3в.

3. Идентифицируйте систему, переходная функция которой имеет относительную амплитуду 1,35 и период которой, измеренный между двумя пересечениями линии установившегося состояния, составляет 13 мс. Коэффициент усиления в установившемся состоянии равен 2,7.

4. Идентифицируйте линейную систему высокого порядка, переходная функция которой представлена на рис. 3.14, используя следующие значения: $T_a=24$ мс, $T_b=72$ мс, $T_d=48$ мс, $K=100$ (на единицу входного сигнала), $\eta=0{,}34$. Можно использовать данные табл. 3.3 и 3.4.

5. Идентифицируйте систему второго порядка, импульсная переходная функция которой представлена на рис. 3.23, вычисляя отношение площадей по уравнению (3.75) и сравнивая переходную функцию с переходными функциями на рис. 3.20.

4

Методы корреляционных функций

Идентификация линейных процессов с помощью методов корреляционных функций возможна как в реальном, так и в измененном масштабе времени. При этом на вход процесса подается белый шум (т. е. некоррелированное случайное входное воздействие, имеющее бесконечный равномерный спектр частот и нулевое математическое ожидание). Хотя в реальных условиях такого воздействия не существует, можно приближенно сформировать шум с характеристиками, подходящими для идентификации с помощью метода корреляционных функций. Если амплитуда этого шума недостаточно велика, то его можно наложить на рабочий входной сигнал, не изменяя характеристик системы, что позволяет провести идентификацию в режиме реального времени. Кроме того, как будет показано ниже, такой входной сигнал в номинальном режиме обычно не влияет на процедуру идентификации.

Для выполнения идентификации требуется обработка входного и выходного сигналов на большом (теоретически бесконечном) отрезке времени. Поэтому в методе корреляционных функций процесс предполагается стационарным (т. е. таким, когда коэффициенты его передаточной функции или уравнений состояния не зависят от времени).

4.1. Интегралы свертки и корреляции

Выход $x(t)$ линейного процесса, имеющего вход $y(t)$, определяется следующим интегралом свертки:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} g(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau, \qquad (4.1)$$

где $g(t)$ — импульсная характеристика $L^{-1}[G(s)]$ системы, рассмотренная в гл. 3 (см. рис. 3.1). При $y(t)=0$, $\forall\, t<0$, уравнение (4.1) принимает вид

$$x(t) = \int_{0}^{t} g(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} g(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau. \qquad (4.2)$$

Физический смысл уравнений (4.1), (4.2) можно понять, если предположить, что $y(t)$ представляет собой последовательность импульсов шириной $\theta \to 0$ и амплитудой $y(t)$, прикладываемых в моменты времени $t=0, \theta, 2\theta, \ldots$, с энергией (площадью) $\theta y(t)$. Будем далее считать, что $x_i(t)$ обозначает реакцию системы в момент времени t на один i-й импульс, т. е. на импульс, приложенный в момент времени $t=(i-1)\theta$. Таким образом, $x_1(t_1)$ обозначает реакцию в момент времени $t=t_1$ на первый импульс [с энергией $\theta y(0)$], приложенный в момент времени $t=0$, так что

$$x_1(t_1) = g(t_1)\,\theta y(0), \tag{4.3}$$

где $g(t_1)$ — импульсный выход (реакция) в момент времени t_1 после приложения соответствующего входного импульса. Аналогично $x_2(t_1)$ обозначает реакцию в момент времени $t=t_1$ на следующий импульс с энергией $\theta y(\theta)$, приложенный в момент времени $t=\theta$, так что

$$x_2(t_1) = g(t_1-\theta)\,\theta y(\theta). \tag{4.4}$$

Аналогично реакция x_i на i-й импульс, который был приложен в момент времени $t=(i-1)\theta$, задается выражением

$$x_i(t_1) = g[t_1-(i-1)\theta]\,\theta y[(i-1)\theta], \tag{4.5}$$

где $g[t_1-(i-1)\theta]$ — импульсная реакция в момент времени $t_1-(i-1)\theta$ после того, как был приложен соответствующий импульс. Поскольку последовательность n импульсов прилагается с момента времени $t=0$ до $t=t_1$, $n=t_1/\theta$, то $x(t_1)$ можно рассматривать как сумму n выходов $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$, ..., $x_n(t_1)$, т. е.

$$x(t_1) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t_1) = \sum_{i=1}^{n} g[t_1-(i-1)\theta]\,\theta y[(i-1)\theta]. \tag{4.6}$$

В пределе, когда $\theta \to d\tau \to 0$ и $i\theta=\tau$, $x(t_1)$ определяется выражением типа интеграла свертки (4.2), который имеет изображение по Лапласу в виде

$$X(s) = G(s)\cdot Y(s). \tag{4.7}$$

Определим теперь взаимную корреляционную функцию $\varphi_{xy}(\theta)$, описывающую взаимосвязь между величиной сигнала $x(t)$ в любой момент времени t и величиной сигнала $y(t-\theta)$ в момент времени $(t-\theta)$, где t может меняться от $-T$ до T следующим образом:

$$\varphi_{xy}(\theta) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,y(t-\theta)\,dt. \tag{4.8}$$

Аналогично определим автокорреляционную функцию $\varphi_{yy}(\theta)$ как усредненное произведение значения сигнала $y(t)$ и значения

такого же сигнала в момент времени $(t-\theta)$, где время t меняется от $-T$ до T, т. е.

$$\varphi_{yy}(\theta) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t)\, y(t-\theta)\, dt. \tag{4.9}$$

4.1.1. Взаимная корреляция и импульсные реакции

Подставляя выражение для $x(t)$ из уравнения (4.1) в (4.8), получаем

$$\varphi_{xy}(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [y(t-\theta) \int_{0}^{\infty} g(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau]\, dt. \tag{4.10}$$

При изменении порядка интегрирования на обратный, что возможно, поскольку t и θ не зависят от τ, уравнение (4.10) приобретает вид

$$\varphi_{xy}(\theta) = \int_{0}^{\infty} g(\tau) \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t-\theta)\, y(t-\tau)\, dt\right] d\tau. \tag{4.11}$$

Выражение в квадратных скобках в уравнении (4.11) можно записать как

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t-\theta)\, y(t-\tau)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t')\, y(t'-\theta')\, dt' =$$

$$= \varphi_{yy}(\theta') = \varphi_{yy}(\theta-\tau), \tag{4.12}$$

$$t' \triangleq t-\tau, \tag{4.13а}$$

$$\theta' \triangleq \theta-\tau, \tag{4.13б}$$

где $\varphi_{yy}(\theta-\tau)$ — автокорреляционная функция входа y. Тогда уравнение (4.11) преобразуется к виду

$$\varphi_{xy}(\theta) = \int_{0}^{\infty} g(\tau)\, \varphi_{yy}(\theta-\tau)\, d\tau. \tag{4.14}$$

Таким образом, взаимная корреляционная функция в уравнении (4.14) описывает по аналогии с уравнением (4.1) гипотетическую реакцию системы с импульсной реакцией $g(t)$ и с входом $\varphi_{yy}(t)$ вместо $y(t)$. Теперь можно рассмотреть входную функцию $y(t)$ типа белого шума, автокорреляционная функция которой

представляет собой (вследствие свойства некоррелированности) дельта-функцию:

$$\varphi_{yy}(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t)\, y(t-\theta)\, dt = \delta(\theta). \qquad (4.15)$$

Взаимная корреляционная функция $\varphi_{xy}(\theta)$ системы с таким же белым шумом на входе принимает по аналогии с уравнением (4.1) вид

$$\varphi_{xy}(\theta) = \int_{0}^{\infty} g(\tau)\, \delta(\theta-\tau)\, d\tau = g(\theta), \qquad (4.16)$$

где $g(\theta)$ — импульсная реакция системы. Далее, поскольку $y(\theta)=0, \forall\ \theta<0$, второй интеграл в уравнении (4.10) имеет пределы интегрирования 0 и θ. Следовательно, уравнение (4.16) запишется следующим образом:

$$\varphi_{xy}(\theta) = \int_{0}^{\theta} g(\tau)\, \delta(\theta-\tau)\, d\tau = g(\theta), \qquad (4.17)$$

где $\varphi_{xy}(\theta)$ — реакция системы $g(t)$ на импульс, приложенный в момент времени $t=\theta$.

4.1.2. Идентификация с помощью белого шума на входе системы

На практике невозможно реализовать входные сигналы $y(t)$ в виде белого шума, поскольку, как было показано, они представляют собой некоррелированные случайные процессы с бесконечным частотным спектром. Однако автокорреляционную функцию можно аппроксимировать дельта-функцией, если $y(t)$ представляет собой случайный шум с равномерным спектром частот, значительно более широким, чем спектр системы, или если $y(t)$ является псевдослучайной периодической бинарной последовательностью, что обсуждается в разд. 4.2.

Для осуществления идентификации в реальном времени случайный или псевдослучайный входной сигнал (автокорреляционная функция которого аппроксимируется дельта-функцией) должен быть наложен на рабочий входной сигнал системы. Следовательно, входной сигнал системы становится равным $Y(t)=R(t)+y(t)$, а действительный выходной сигнал $x(t)$ представляет собой реакцию на $Y(t)$, а не на $y(t)$. Взаимная корреляция в задачах идентификации имеет место между выходом $x(t)$ и случайной или псевдослучайной составляющей $y(t)$ суммарного входного сигнала, как показано на рис. 4.1. Поскольку рассма-

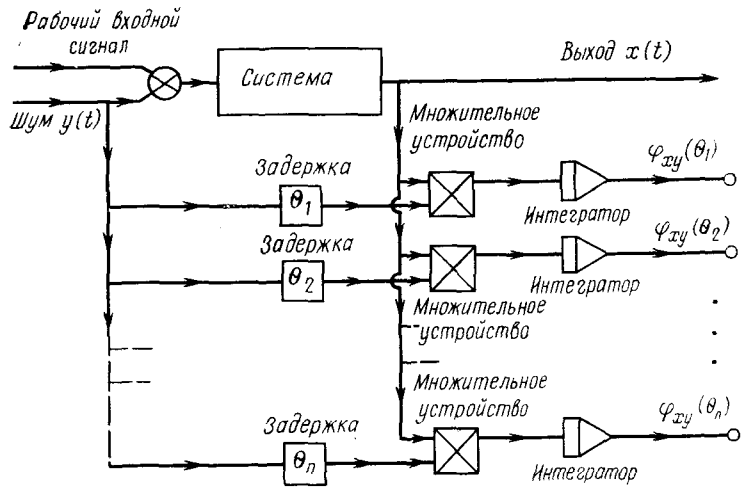


Рис. 4.1. Взаимная корреляция в системе с наложенным на входной сигнал шумом.

тривается линейная система, можно определить выход $x(t)$ следующим образом:

$$x(t) \stackrel{\Delta}{=} x_R(t) + x_y(t), \tag{4.18}$$

где $x_R(t)$ и $x_y(t)$ — составляющие выходного сигнала, обусловленные рабочей (неслучайной) составляющей $R(t)$ и случайной составляющей $y(t)$ входного сигнала соответственно.

Тогда, подставляя выражение для $x(t)$ из уравнения (4.18) в (4.8), получим

$$\varphi_{xy}(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left[\int_{-T}^{T} x_R(t)_y(t-\theta)\,dt + \int_{-T}^{T} x_y(t)\,y(t-\theta)\,dt\right], \tag{4.19}$$

где в соответствии с выводом уравнений (4.9) — (4.16) только второй член в квадратных скобках в уравнении (4.19) равен $g(\theta)$. Однако рабочий входной сигнал $R(t)$, как правило, является неслучайным и задается в узкой полосе частот, тогда как $y(t)$ случаен и имеет равномерный спектр частот. Таким образом, $R(t)$ и $y(t)$ слабо коррелированы, а значит, слабо коррелированы $x_R(t)$ и $y(t)$. Следовательно, первый член в квадратных скобках в уравнении (4.19) пренебрежимо мал, и интеграл взаимной корреляции $\varphi_{xy}(\theta)$ между y и x дает $g(\theta)$, даже если $y(t)$ наложен на $R(t)$. Полученный результат позволяет проводить

идентификацию в реальном масштабе времени в тех случаях, когда амплитуда $y(t)$ достаточно мала по сравнению с $R(t)$ и вход $y(t)$ не влияет на функционирование системы.

4.2. Генерация случайных и псевдослучайных последовательностей

4.2.1. Генераторы случайных чисел

Белый шум можно генерировать путем использования такого источника шума, как радиоактивный образец, возбуждающий счетчик Гейгера. Бинарный белый шум в этом случае может

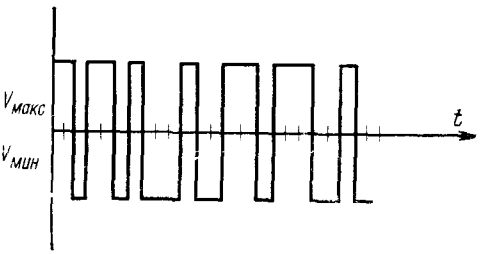


Рис. 4.2. Бинарный шум.

быть получен, если выход трубки Гейгера подключить к триггерной цепочке и через нее к контуру ограничения сигналов, чтобы на его выходе можно было получить сигналы $V_{макс}$ или $V_{мин}$, как показано на рис. 4.2.

Генерация случайных последовательностей с помощью ЦВМ представляется довольно длительной процедурой, поскольку для адекватной идентификации необходимо выработать по меньшей мере 2000 случайных чисел, образующих шумовую составляющую входного сигнала, используемого для идентификации с помощью методов, в которых используется корреляционный интеграл (4.19). Генерация этих чисел основана на следующем соотношении по модулю N:

$$y_{i+1} \equiv a y_i \pmod{N}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.20}$$

где y_i, a и N — целые числа и

$$y_0 \not\equiv 0 \pmod{N}. \tag{4.21}$$

Отметим, что условие $A \equiv B \pmod{N}$ обеспечивает конгруэнтность (совпадение) по модулю N, т. е. A и B имеют одинаковый остаток при делении на N. Следовательно, при произвольном начальном значении y_0 случайные числа y_i представляют собой ре-

зультат перемножения в соответствии с уравнением (4.20), причем каждое произведение нормируется по модулю N (т. е. заменяется частным от его деления на N). Уравнение (4.20) обеспечивает распределение получающихся случайных чисел между 0 и N. Обычно N выбирается равным b^k, где b — основание слова в ЦВМ (10 в машинах с десятичной системой и 2 с двоичной), а k — целое число; y_0 удобно выбирать равным 1, тогда как a всегда должно быть достаточно большим. Часто для машин с десятичной системой рекомендуется $a=7^9$ [1]. Последовательность, получаемая в соответствии с выражением (4.20), является периодической. Однако при удачном выборе a, N, k период может быть очень большим ($5\cdot10^7$ чисел при $a=7^9$, $N=10^{10}$).

4.2.2. Генерация псевдослучайных бинарных последовательностей

Псевдослучайные бинарные последовательности (ПСБП) являются, вероятно, наиболее удобными входными сигналами для целей идентификации с помощью методов, использующих корреляционную функцию. Эти последовательности периодические, их периоды относительно коротки, но все же соответствующие им автокорреляционные функции можно удовлетворительно аппроксимировать дельта-функцией. Из-за периодического характера этих последовательностей для их генерации требуются (по сравнению со случайными последовательностями подобной длины) весьма ограниченный объем памяти ЦВМ и небольшое машинное время. Кроме того, их автокорреляционная функция лучше аппроксимируется дельта-функцией, чем для случайных последовательностей подобной длины (например, последовательности из 150 элементов, полученной на основании псевдослучайного кода и имеющей цикл длиной 15 элементов, по сравнению со случайной последовательностью с циклом бесконечной длины). Таким образом, идентификация, осуществленная с помощью ПСБП, оказывается более точной (рис. 4.3).

4.2.2а. Псевдослучайные последовательности максимальной длины. Нуль-последовательность максимальной длины представляет собой бинарную последовательность, автокорреляционный интеграл которой, удовлетворительно аппроксимируемый дельта-функцией, обладает псевдослучайными свойствами, и поэтому она может быть использована как входной шум в процедурах идентификации с помощью корреляционного метода. Такие последовательности легко получаются с помощью регистров сдвига или простого цифрового алгоритма.

Нуль-последовательности максимальной длины [2] удовлетворяют линейному разностному уравнению (по модулю 2) вида

$$D^m x \oplus D^{m-1}x \oplus \ldots \oplus Dx \oplus x \equiv Y. \qquad (4.22)$$

Здесь D^m обозначает задержку на m интервалов, т. е. $D^m x_i = x_{i-m}$, i — момент квантования, $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2 [такое, что $0 \oplus 0 \equiv 0$, $0 \oplus 1 \equiv 1$, $1 \oplus 0 \equiv 1$, $1 \oplus 1 \equiv 0$, и, следовательно, $(D \oplus D)x \equiv 0, \forall x$].

Уравнение (4.22) можно переписать как

$$(D^m \oplus D^{m-1} \oplus \ldots \oplus D \oplus I)x \equiv Y. \qquad (4.23)$$

Здесь I — единичный оператор. Последовательность с задержками $\{x_i\}$ порядка m, как в уравнении (4.22), при $Y \equiv 0$ называется *нуль-последовательностью.* Решения, удовлетворяющие нулевой последовательности, являются периодическими. Максимальное число членов в нулевой последовательности порядка m равно $2^m - 1$, а получающаяся при этом последовательность называется *нуль-последовательностью максимальной длины* (НПМД).

Полиномиальное уравнение вида

$$(D^m \oplus \ldots \oplus D \oplus I)x \equiv 0, \qquad (4.24)$$

которое позволяет сформировать НПМД, должно быть нередуцируемым (т. е. не должно являться произведением двух или более полиномов низшего порядка). Далее, оно не должно являться делителем по модулю 2 полинома $D^n \oplus 1$ при $n < 2^m - 1$ (т. е. оно не должно делить $D^m \oplus 1$ по модулю 2). Следовательно, для $m = 5$ НПМД задается соотношением

$$(D^5 \oplus D^3 \oplus I)x \equiv 0, \qquad (4.25)$$

которое представляет собой последовательность из $2^5 - 1 = 31$ элемента. Однако полином порядка 5 вида

$$(D^5 + \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus I)x \equiv 0 \equiv \frac{D^6 \oplus I}{D \oplus I} \qquad (4.26)$$

не дает НПМД, поскольку он является делителем $D^6 \oplus I$.

Полиномы (до 11-го порядка), определяющие НПМД, приведены в табл. 4.1 [3]. Отметим, что поскольку рассматриваются операции по модулю 2, уравнение (4.25) может быть переписано как $(D^5 \oplus D^3)x \equiv x$. Генератор НПМД для $m = 7$ на регистрах сдвига показан на рис. 4.4, где в соответствии с табл. 4.1 выходы четвертого и седьмого элементов задержки складываются (по модулю 2) для получения x. Следовательно, эти выходы должны быть введены опять в первый разряд регистра сдвига. Начальные логические значения в m разрядах регистра сдвига не

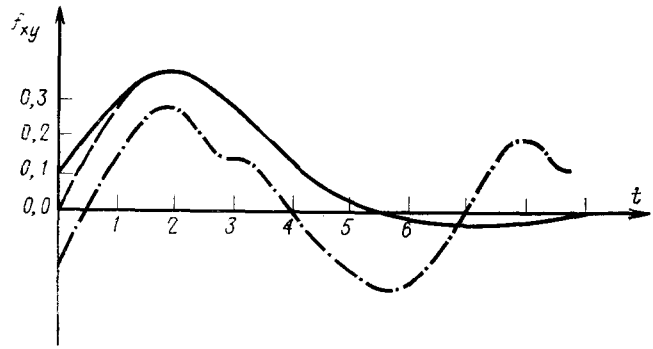


Рис. 4.3. Сравнение результатов идентификации, основанной на случайном входном сигнале и сигнале типа ПСБП.

— — — теоретическая кривая; ——— ПСБП; —·— случайная последовательность. Исследуемая система $G(s)=1/(2s^2+1{,}9s+1{,}3)$; длина последовательностей 80 чисел; цикл ПСБП 15 чисел.

могут быть все равны нулю, поскольку в этом случае регистр сдвига будет оставаться в нулевом состоянии.

Код НПМД представляет собой последовательность из нулей и единиц, среднее значение которой для $N=2^m-1$ примерно равно $N/2$. Это значение не является случайной величиной и приводит к автокорреляционному интегралу, отличному от импульса, вычисленного по его среднему значению (для примера можно рассмотреть НПМД с периодом 15 : 111100010011010). Более предпочтительной является НПМД, элементы которой равны 1, —1, а не 1 и 0, с автокорреляционным интегралом, представленным на рис. 4.5. Такая последовательность называется НПМДО (НПМД-отрицательной).

Таблица 4.1

n	Полином НПМД
2	$(D^2\oplus D)\ x\equiv x$
3	$(D^3\oplus D)\ x\equiv x$
4	$(D^4\oplus D^3)\ x\equiv x$
5	$(D^5\oplus D^3)\ x\equiv x$
6	$(D^6\oplus D^5)\ x\equiv x$
7	$(D^7\oplus D^4)\ x\equiv x$
8	$(D^8\oplus D^4\oplus D^3\oplus D^2)\ x\equiv x$
9	$(D^9\oplus D^5)\ x\equiv x$
10	$(D^{10}\oplus D^7)\ x\equiv x$
11	$(D^{11}\oplus D^9)\ x\equiv x$

Пример 4.1

Чтобы проиллюстрировать получение НПМД, рассмотрим трехразрядный регистр сдвига. Первоначально все его разряды находятся в логическом состоянии 1. Для получения НПМД вводится обратная связь с первого и третьего разрядов регистра на сумматор по модулю 2 в соответствии с табл. 4.1. Следова-

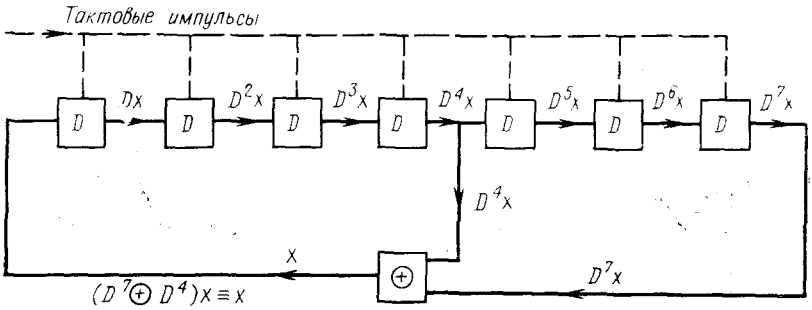


Рис. 4.4. Семиразрядный регистр сдвига для получения НПМД.

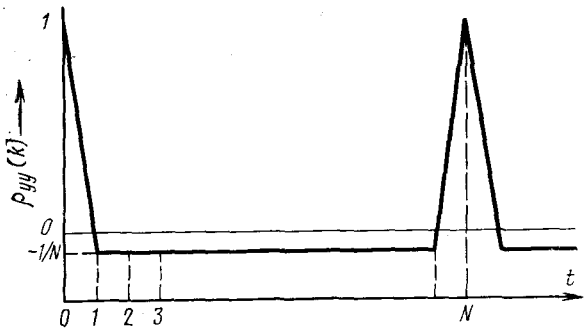


Рис. 4.5. Автокорреляционная функция для НПМДО.

Таблица 4.2

Временной интервал i	*Выход сумматора* $X \equiv Y_1 + Y_3$	*Разряд 1* $Y_1 \equiv DX$	*Разряд 2* $Y_2 \equiv DY_1$	*Разряд 3* $Y_3 \equiv DY_2$
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	0	1	0
5	1	0	0	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0
8	0	1	1	1

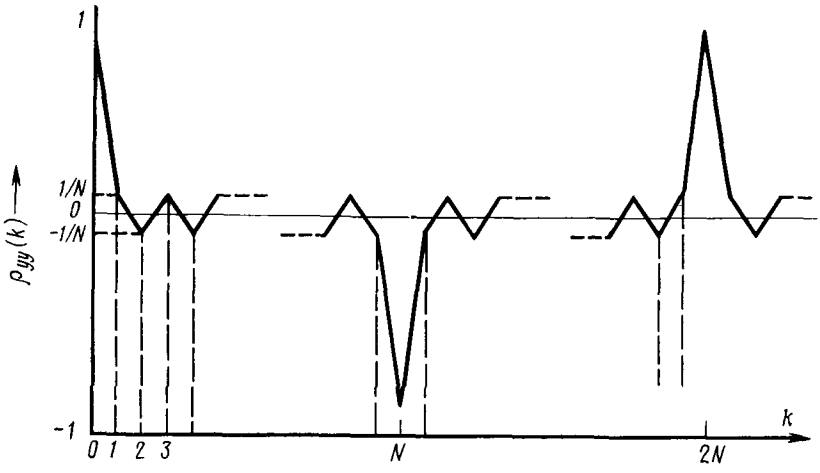


Рис. 4.6. Автокорреляционная функция для инверсно повторяющейся НПМДО.

тельно, на выходе сумматора первоначально будет $x(1) \equiv \equiv 1 \oplus 1 \equiv 0$. Последовательность, выработанная на выходе сумматора и в различных разрядах, может быть табулирована, как показано в табл. 4.2. В этой таблице Y_1 на интервале $i+1$ есть состояние X на интервале i, т. е. $Y_1 \equiv DX$. Аналогично Y_2 на интервале $i+1$ есть Y_1 на интервале i и Y_3 на интервале $i+1$ есть Y_2 на интервале i. Видно, что все состояния на восьмом интервале ($8=2^3$, 3 — число разрядов регистра сдвига) совпадают с начальным состоянием на первом интервале ($i=1$). Следовательно, данный регистр сдвига, как было показано, вырабатывает *последовательность вида 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1 из* $7=2^3-1$ элементов.

Другая псевдослучайная последовательность со средним значением, даже более близким к нулю, чем у НПМДО, представляет собой *инверсно повторяющуюся* НПМДО, у которой знак каждого следующего элемента НПМДО изменен на противоположный. Поскольку период НПМДО нечетен, инверсно повторяющаяся НПМДО имеет период $2N$ (т. е. удвоенный период НПМДО). Получающаяся при этом автокорреляционная функция имеет вид, представленный на рис. 4.6.

4.2.2б. Квадратические остаточные коды для псевдослучайных последовательностей. В то время как число элементов в кодах НПМД может быть равно только 2^i-1 (например 3, 7, 15, 31, 63, ...), число элементов в квадратических остаточных последовательностях может принимать гораздо более близкие друг

другу значения (3, 7, 11, 19, 23, ...). Следовательно, можно выбрать последовательности промежуточной длины между двумя возможными длинами НПМД. Число элементов квадратических остаточных псевдослучайных последовательностей задается соотношением

$$N = 4K - 1, \tag{4.27}$$

где K — целое число.

Квадратические остаточные последовательности (табл. 4.3) получаются следующим образом [3]. Элемент такой последо-

Таблица 4.3

Квадратические остаточные последовательности ($N=19$)

q	q^2	Ближайший множитель N, меньший q^2	$q^2 \bmod N$
1	1	0	1
2	4	0	4
3	9	0	9
4	16	0	16
5	25	19	6
6	36	19	17
7	49	38	11
8	64	57	7
9	81	76	5
10	100	95	5
11	121	114	7
12	144	133	11
13	169	152	17
14	196	190	6
15	225	209	16
16	256	247	9
17	289	285	4
18	324	323	1

вательности с порядковым номером q, равным любому числу $q^2 \bmod N$, принимает значение $+1$, а все другие элементы принимают значение -1. Только элемент с порядковым номером N может быть равным либо $+1$, либо -1. Следовательно, для $N=19$ элементы с порядковыми номерами $q=1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17$ равны $+1$, поскольку эти номера оказываются в последней колонке табл. 4.1, тогда как элементы с номерами $q=2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18$ равны -1, а девятнадцатый элемент может быть равным либо $+1$, либо -1. Из табл. 4.3 видно, что элементы $q^2 \bmod N$ симметричны относительно $q=\frac{1}{2}(N-1)$ и, таким образом, необходимо вычислить значения лишь от $(1 \bmod N)$ до

$[^1/_2(N-1) \bmod N]$, т. е. только для $^1/_2(N-1)$ членов. Для $N=7$ квадратическая остаточная псевдослучайная последовательность имеет вид 1, 1, —1, 1, —1, —1, 1 если N-й элемент равен $+1$. Соответствующая НПМДО для $N=1$ является в точности такой же (1, 1, —1, 1, —1, —1, 1).

4.3. Получение частотных характеристик на основе корреляционных функций

Методы идентификации на основе корреляционных функций, рассматриваемые в настоящей главе, позволяют найти импульсную характеристику системы, т. е. осуществить ее идентификацию. Для определения передаточной функции системы $G(s)$ или коэффициентов ее уравнений состояния необходимо использовать методы, обсуждавшиеся в разд. 3.4, которые позволяют получить $G(s)$ по записи $g(t)$. Отметим, что графическое изображение $g(t)$ может быть получено, если вычислять $g(\theta)$ из уравнения (4.15) для достаточного числа значений θ.

Рассматривая интеграл взаимной корреляции (4.14), будем снова считать его интегралом свертки, где

$$\varphi_{xy}(\theta) \triangleq \xi(\theta), \tag{4.28а}$$

$$\varphi_{yy}(\theta) \triangleq \eta(\theta), \tag{4.28б}$$

что дает

$$\xi(\theta) = \int_0^\infty g(\tau)\,\eta(\theta-\tau)\,d\tau. \tag{4.29}$$

Известно, что преобразования Лапласа и Фурье интеграла свертки вида (4.29) задаются соотношениями [4]

$$\xi(s) = G(s)\,\eta(s), \tag{4.30а}$$

$$\xi(j\omega) = G(j\omega)\,\eta(j\omega). \tag{4.30б}$$

Следовательно, $G(j\omega)$ получается в соответствии с выражением

$$G(j\omega) = \xi(j\omega)/\eta(j\omega), \tag{4.31}$$

где

$$\xi(j\omega) \triangleq F[\varphi_{xy}(\theta)] = \Phi_{xy}(j\omega), \tag{4.32}$$

$$\eta(j\omega) \triangleq F[\varphi_{yy}(\theta)] = \Phi_{yy}(j\omega). \tag{4.33}$$

Последние два преобразования Фурье могут быть получены с помощью быстрого преобразования Фурье, обсуждавшегося в

разд. 3.1.1. Поскольку белый шум на входе $y(t)$ и псевдослучайный входной шум удовлетворяют соотношению

$$\varphi_{yy}(\theta) \cong \delta(\theta), \tag{4.34}$$

то получаем

$$\Phi_{yy}(j\omega) \cong 1 \tag{4.35}$$

и

$$G(j\omega) = \xi(j\omega)/1 = \xi(j\omega). \tag{4.36}$$

4.4. Вычислительные аспекты

Для идентификации $g(\theta)$ необходимо вычислить взаимную корреляционную функцию (4.8), которая в дискретной форме принимает вид

$$\varphi_{xy}(k) = \frac{1}{(2M+1)} \sum_{i=-M}^{M} x_i y_{i-k} \text{ при } k = 0, 1, \ldots, (M-1),$$

$$k\Delta t \triangleq \theta, \quad M\Delta t \triangleq T. \tag{4.37}$$

Однако, поскольку $x(t) = 0, \forall t \leqslant 0$, φ_{xy} может быть представлена в виде

$$\varphi_{xy}(k) = \frac{1}{(M-k)} \sum_{i=1}^{M-k} x_{i+k} y_i. \tag{4.38}$$

Если $G(j\omega)$ получается по уравнению (4.29), то также необходимо вычислить функцию $\varphi_{xy}(k)$, определяемую соотношением

$$\varphi_{yy}(k) = \frac{1}{(M-k)} \sum_{i=1}^{M-k} y_i y_{i+k} \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, (M-1), \tag{4.39}$$

а затем получить преобразования Фурье $\Phi_{xy}(j\omega)$ для $\varphi_{xy}(k)$ и $\Phi_{yy}(j\omega)$ для $\varphi_{yy}(k)$, как в уравнении (3.8) из разд. 3.1.1. Возможен также способ более быстрого получения $\Phi_{xy}(j\omega)$, $\Phi_{yy}(j\omega)$ и, следовательно, $\mathbf{G}(j\omega)$, если сначала вычисляются преобразования Фурье $X(j\omega)$ для $x(t)$ и $Y(j\omega)$ для $y(t)$. Тогда вообще не требуется вычислить функции $\varphi_{xy}(k)$, $\varphi_{yy}(k)$. Последний способ, который также позволяет уменьшить ошибки округления, основан на соотношениях

$$\Phi_{xy}(j\omega) = X(j\omega)\, Y^*(j\omega), \tag{4.40}$$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = Y(j\omega) Y^*(j\omega), \tag{4.41}$$

где Y^* — функция, сопряженная Y, а $X(j\omega)$ и $Y(j\omega)$ получаются путем применения процедуры быстрого преобразования Фурье

к $x(t)$, $y(t)$ (см. разд. 3.1.1). Даже в тех случаях, когда нужны сами функции $\varphi_{xy}(k)$, $\varphi_{yy}(k)$, их вычисление можно произвести с помощью быстрого преобразования Фурье по уравнениям (4.40), (4.41) и последующего быстрого обратного преобразования Фурье. Последний подход также приведет к уменьшению ошибок округления и к ускорению вычислений в несколько сотен раз по сравнению с расчетами $\varphi_{xy}(k)$, $\varphi_{yy}(k)$ по уравнениям (4.38), (4.39), если используются записи $x(t)$ и $y(t)$ большой длительности.

Уравнения (4.40) и (4.41) получают с помощью преобразования Фурье к $\varphi_{xy}(\theta)$ уравнения (4.8) следующим образом:

$$\Phi_{xy}(j\omega) = F[\varphi_{xy}(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t-\theta) dt \right] e^{-j\omega\theta} d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-8}^{\infty} y(t-\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \right] dt. \qquad (4.42)$$

Подставляя

$$t' \triangleq t - \theta, \qquad (4.43)$$

получаем (после перемены пределов интегрирования и изменения знака во внутреннем интеграле)

$$\Phi_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t') e^{-j\omega(t-t')} dt' \right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t') e^{j\omega t'} dt' \right] dt. \qquad (4.44)$$

Видно, что член в последних квадратных скобках в уравнении (4.44) представляет собой $Y^*(j\omega)$. Следовательно, уравнение (4.40) справедливо.

Подстановка $\Phi_{xy}(j\omega)$, $\Phi_{yy}(j\omega)$ из уравнений (4.40) и (4.41) в уравнение (4.31) дает

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega) Y^*(j\omega)}{Y(j\omega) Y^*(j\omega)} = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)}. \qquad (4.45)$$

Следовательно, $\mathbf{G}(j\omega)$ можно определить, вычисляя лишь $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ и выполняя их деление в соответствии с уравнением (4.45). Однако это деление довольно неудобно по сравнению с вычислением $\Phi_{xy}(j\omega)$. Поэтому, замечая, что $\Phi_{yy}(j\omega)=1$ для белого шума $y(t)$ на выходе, как в уравнении (4.35), можно быстрее оп-

ределить $G(j\omega)$ из уравнения (4.36). Сравнивая уравнения (4.41) и (4.35), получаем

$$|Y(j\omega)| = \sqrt{\Phi_{yy}(j\omega)} = 1. \qquad (4.46)$$

Подстановка последнего результата в уравнение (4.45) приводит к тому, что из-за деления $X(j\omega)/Y(j\omega)$ информация о фазе теряется.

Для входной последовательности из N элементов длительности $N\Delta t$ интервал Δt определяет максимальную частоту получаемой частотной характеристики, если $G(j\omega)$ вычисляется в соответствии с уравнением (4.31) или (4.36).

Пределы для i и k в уравнениях (4.38) (4.39) приводят к тому, что длина N входной последовательности должна равняться по крайней мере $2M$, где $M\Delta t$ — рассматриваемый диапазон записи $g(t)$. В случае инверсно повторяющихся НПМД-кодов, описанных в разд. 4.2.2а, с периодом $2N$ необходимо, чтобы выполнялось условие $N \geqslant 2M$, где N равняется половине периода $2N$ инверсно повторяющихся входов НПМД для того, чтобы избежать влияния вторых пиков автокорреляционных функций шумовых последовательностей, как показано на рис. 4.5 и 4.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scheid F., Numerical Analysis, Schaum—McGraw-Hill, New York, 1968.
2. Briggs P. A. N., Hammond P. H., Hughes M. T. G., Plumb G. O., Correlation Analysis of Process Dynamics Using Pseudo-Random Binary Test Perturbation, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, **179**, Pt. 3H, pp. 37—51 (1965).
3. Godfrey K. R., The Theory of the Correlation Method of Dynamic Analysis and its Application to Industrial Processes and Nuclear Power Plant, *Measurement and Control*, **2**, pp. T65—T72 (1969).
4. Miller K. S., Engineering Mathematics, Dover, New York, 1963.

Задачи

1. Постройте последовательность чисел в соответствии с уравнением (4.20) при $a=13$, $y_0=1$, $N=100$. Обратите внимание на периодичность этой последовательности.

2. Вычислите автокорреляционную функцию последовательности из задачи 1 по уравнению (4.39) и нанесите ее на график. Можете добавить элементы в последовательность таким образом, чтобы число элементов, используемых для определения $\varphi_{yy}(k)$, было одинаковым при всех k, и сравните решение со случаем, в котором число используемых элементов убывает по k при фиксированном M в уравнении (4.39).

3. Постройте НПМД-последовательность из 31 элемента, используя пятиразрядный сдвиговый регистр.

4. Вычислите автокорреляционную функцию $\psi_{xx}(k)$ для НПМД-последовательности из 15 элементов и покажите, что для НПМД-последовательности $\psi_{xx}(0)=1$.

5. Постройте квадратическую остаточную последовательность с $N=11$.

6. Напишите программу вычисления для случая, когда квадратическая остаточная последовательность с $N=619$ вводится в линейную систему с передаточной функцией $G(s)=(0{,}8s+1)\ /\ /(s^2+s+0{,}8)$. Затем вычислите выход системы, взаимную корреляцию между входом и выходом и сравните эту корреляцию с аналитической зависимостью $g(t)$. Выберите интервал между битумами шума, равный 0,01. Используйте в этой задаче быстрое преобразование Фурье.

7. Повторите задачу 6 для случая, когда шум накладывается на входной сигнал $25e^{-t}\sin t$. Учтите, что для целей автокорреляции следует рассмотреть входной шум. Используйте в этой задаче быстрое преобразование Фурье.

8. Рассмотрите входные и выходные функции из задачи 6 и определите $G(j\omega)$ в соответствии с уравнением (4.45), используя процедуру быстрого преобразования Фурье. Сравните характеристику $G(j\omega)$ с полученной из аналитической амплитудно-частотной характеристики.

5

Идентификация с помощью регрессионных методов

Регрессионный анализ является в настоящее время классическим статистическим методом [1]. Благодаря своим широким возможностям различные регрессионные процедуры давно и успешно используются в инженерной практике для идентификации процессов, однако их применение к идентификации многомерных процессов в реальном масштабе времени стало возможным только с развитием и внедрением быстродействующих ЦВМ [2—7].

Методы идентификации, основанные на регрессионных процедурах с использованием метода наименьших квадратов, применимы как к линейным, так и к нелинейным процессам и облегчают проведение идентификации по нескольким входам одновременно. Более того, регрессионные методы позволяют осуществлять идентификацию в реальном масштабе времени, поскольку они основаны на измерениях входных и выходных сигналов, которые можно получить в процессе нормального функционирования системы.

В течение периода, пока выполняются измерения для регрессионной идентификации, параметры идентифицируемого процесса принимаются стационарными или квазистационарными. Этот период должен быть не менее mT, где T — интервал измерения, а m — число идентифицируемых параметров (см. разд. 5.1 и 5.2). Если требуется идентифицировать m коэффициентов в n совместных уравнениях вида

$$x_j = a_{0j} + a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \ldots + a_{mj}u_m, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5.1)$$

и если одни и те же $u_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ присутствуют во всех n уравнениях, то все $a_{ij}\ \forall\, i, j$ могут быть идентифицированы за $m+1$ интервалов измерения. Следовательно, идентификация всех m коэффициентов этих n уравнений может проводиться одновременно, как показано в разд. 5.3.

Выше отмечалось, что для применения регрессионных методов требуется накопление данных о неустановившихся состояниях входа/выхода по меньшей мере на $m+1$ измерительных интервалах. Следовательно, на i-м интервале времени регрессионная

идентификация основывается на данных от $(i-m-p)$-го $(p \geqslant 0)$ до i-го интервала. Аналогично на $(i+1)$-м интервале она базируется на данных от $(i-m-p+1)$-го до $(i+1)$-го интервала, облегчая тем самым выявление нестационарности входных и выходных сигналов. Если необходимо идентифицировать более одного параметра, то, как показано ниже, для получения параметров регрессии требуется обращение матриц. Рекуррентный вид регрессионных методов, позволяющий обойтись *без обращения* матриц, обсуждается в гл. 6. Регрессионные методы рассматриваются в гл. 8 в связи с использованием методов квазилинеаризации в задачах идентификации, в гл. 9 — для идентификации с прогнозом и в гл. 12 — применительно к идентификации параметров устройства прогноза (*предсказателя*).

5.1. Статическая задача для системы с одним выходом

Рассмотрим линейную статическую систему, представленную на рис. 5.1, имеющую m входов $U_1, \ldots, U_m$ и один выход X. Эта система может быть описана следующим линейным уравнением:

$$X = a_0 + a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots + a_m U_m. \tag{5.2}$$

Используя серию измерений величин X, U_j $(j=0, 1, 2, \ldots, m)$ в r моментов времени, можно определить параметры a_i следующим образом. Сначала вводят в память ЦВМ все r совокупностей измерений величин X и U_j. Далее эти r совокупностей измерений используют для вычисления $\bar{X}$ и $\bar{U}$, где $\bar{X}$ — среднее значение X, а $\bar{U}$ — среднее значение U для указанной серии измерений. Обозначим

$$x \stackrel{\Delta}{=} X - \bar{X}, \tag{5.3}$$

$$u \stackrel{\Delta}{=} U - \bar{U}. \tag{5.4}$$

При этом уравнение (5.1) принимает вид

$$x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_m u_m, \tag{5.5}$$

или в векторной форме

$$x = \mathbf{u}^T \mathbf{a}, \tag{5.6}$$



Рис. 5.1. Процесс с одним выходом.

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{a}$ — вектор-столбцы с элементами u_j, a_j соответственно. Поэтому r последовательных измерений удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x_{(1)} &= \mathbf{u}_{(1)}^T \cdot \mathbf{a}, \\ &\vdots \\ x_{(\mu)} &= \mathbf{u}_{(\mu)}^T \cdot \mathbf{a}, \\ &\vdots \\ x_{(r)} &= \mathbf{u}_{(r)}^T \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где μ обозначает момент измерений x, $\mathbf{u}^T$ ($\mu = 1, 2, \ldots, r$). Определим далее вектор χ и матрицу $\mathbf{U}$ следующим образом:

$$\chi \triangleq [x_{(1)} \ldots x_{(\mu)} \ldots x_{(r)}]^T, \tag{5.8}$$

$$\mathbf{U} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(1)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{(\mu)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{(r)}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1(1)} & \ldots & u_{j(1)} & \ldots & u_{m(1)} \\ \vdots & & & & \\ u_{1(\mu)} & \ldots & \ldots & \ldots & u_{m(\mu)} \\ \vdots & & & & \\ u_{1(r)} & \ldots & \ldots & \ldots & u_{m(r)} \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Следовательно, система уравнений (5.7) может быть записана в векторной форме:

$$\chi = \mathbf{U} \cdot \mathbf{a}. \tag{5.10а}$$

Предполагая, что компоненты вектора $\mathbf{a}$ в уравнении (5.10а) являются оценками $\hat{\mathbf{a}}$ истинного вектора $\mathbf{a}$, можно с помощью уравнения (5.10а) получить такие оценки $\hat{\chi}$ вектора χ, что

$$\hat{\chi} = \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{a}}. \tag{5.10б}$$

Скалярную сумму S квадратических ошибок оценивания можно определить следующим образом:

$$S \triangleq (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) = \operatorname{tr}[(\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})(\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T], \tag{5.11}$$

где $\operatorname{tr}[\ldots]$ обозначает след матрицы $[\ldots]$. Таким образом, наилучшая (в смысле наименьших квадратов) оценка вектора $\mathbf{a}$ должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{a}_i} = 0, \quad \forall i \in (1, m), \tag{5.12}$$

или в векторной форме

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \operatorname{tr}\left[(\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})(\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T\right]}{\partial \hat{\mathbf{a}}} =$$

$$= \frac{\partial \operatorname{tr}\left(\chi\chi^T + \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\chi^T - \chi\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T\right)}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = 0. \tag{5.13}$$

В соответствии с правилами вычисления следа матричной функции [8—10], приведенными в приложении 2, уравнение (5.13) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\chi\chi^T + \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\chi^T - \chi\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T\right)}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = 0 + 2\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{U}^T\chi -$$

$$- \mathbf{U}^T\chi = 2\left(\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{U}^T\chi\right) = 0. \tag{5.14}$$

Поэтому наилучшая в смысле наименьших квадратов оценка $\hat{\mathbf{a}}^*$ вектора $\mathbf{a}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}^* = \mathbf{U}^T\chi, \tag{5.15}$$

так что

$$\hat{\mathbf{a}}^* = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\chi = [\hat{a}_1^*, \hat{a}_2^*, \ldots, \hat{a}_m^*]^T, \tag{5.16}$$

что и позволяет построить процедуру идентификации вектора $\mathbf{a}$ на основе линейной регрессии и метода наименьших квадратов. Отметим, что матрица $(\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}$ существует только тогда, когда матрица $\mathbf{U}$ не является особенной.

Далее потребуем, чтобы число измерений r было больше числа идентифицируемых параметров ($r \geqslant m$)[1]. Если $r=m$, то в оценке χ шум измерений не будет сглажен. Из этого условия следует, что для адекватной идентификации требуется по крайней мере $m+1$ измерений, причем в течение этого периода система предполагается стационарной.

---

[1] Заметим, что для применения метода наименьших квадратов должно выполняться условие $r \gg m$. — *Прим. ред.*

5.2. Статическая задача для системы с несколькими входами и несколькими выходами

Процесс, имеющий m входов и n выходов (рис. 5.2) по аналогии с процессом с одним выходом может быть описан следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}u_1 + \ldots + a_{1j}u_j + \ldots + a_{1m}u_m,\\
&\vdots\\
x_i &= a_{i1}u_1 + \ldots + a_{ij}u_j + \ldots + a_{im}u_m,\\
&\vdots\\
x_n &= a_{n1}u_1 + \ldots + a_{nj}u_j + \ldots + a_{nm}u_m,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \tag{5.18}$$

где

$$\mathbf{x} \triangleq (x_1 \ldots x_i \ldots x_n)^T, \tag{5.19}$$

$$\mathbf{u} \triangleq (u_1 \ldots u_j \ldots u_m)^T \tag{5.20}$$

и

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}\ldots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{n1}\ldots a_{nm} \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

Каждая строка в уравнениях (5.17) или (5.18) имеет точно такой же вид, как и в уравнениях (5.5) или (5.6) для системы с одним выходом. Следовательно, можно записать i-ю строку уравнения (5.17) следующим образом:

$$x_i = \mathbf{u}^T \mathbf{a}_i, \tag{5.22}$$



Рис. 5.2. Процесс с несколькими входами и несколькими выходами.

где

$$\mathbf{a}_i \stackrel{\Delta}{=} [a_{i1} a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{im}]^T. \tag{5.23}$$

Подобно процессу с одним выходом для r измерений ($r \geqslant m+1$), величины x_i, u_j ($i=1,\ldots, n$; $j=1,\ldots, m$) определим в виде

$$\boldsymbol{\chi}_i \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} x_{i(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{i(\mu)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{i(r)} \end{bmatrix}, \tag{5.24}$$

$$\mathbf{U} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} u_{1(1)} \ldots u_{m(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{1(\mu)} \ldots u_{m(\mu)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{1(r)} \ldots u_{m(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(1)}^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{(r)}^T \end{bmatrix}. \tag{5.25}$$

Индекс в скобках (μ) означает μ-ю совокупность измерений ($\mu=1, 2,\ldots, r$), а $\mathbf{u}$ — то же самое, что и в уравнении (5.9). Поэтому указанные выше r измерений удовлетворяют для i-го выхода соотношениям

$$\begin{aligned} x_{i(1)} &= \mathbf{u}_{(1)}^T \mathbf{a}_i, \\ &\cdot \quad\quad \cdot \\ &\cdot \quad\quad \cdot \\ x_{i(\mu)} &= \mathbf{u}_{(\mu)}^T \mathbf{a}_i, \\ &\cdot \quad\quad \cdot \\ &\cdot \quad\quad \cdot \\ x_{i(r)} &= \mathbf{u}_{(r)}^T \mathbf{a}_i, \end{aligned} \tag{5.26а}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{U}\mathbf{a}_i. \tag{5.26б}$$

Поскольку уравнения (5.26) аналогичны уравнениям (5.7) и (5.8) для системы с одним выходом, то наилучшие в смысле регрессии по методу наименьших квадратов оценки $\hat{a}_i^*$ параметров $a_i \; \forall \; i$ удовлетворяют соотношению

$$\hat{\mathbf{a}}_i^* = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \boldsymbol{\chi}_i = (\hat{a}_{1i}^* \ldots \hat{a}_{mi}^*). \tag{5.27}$$

Следовательно, вывод уравнения (5.27) идентичен выводу уравнения (5.16), если все $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\chi}$ в уравнениях (5.6)—(5.16) заменить на $\mathbf{a}_i$, $\boldsymbol{\chi}_i$ [$\mathbf{a}_i$ и $\boldsymbol{\chi}_i$ определяются уравнениями (5.23) и (5.24)].

Идентификация $\hat{\mathbf{a}}_i^*$ в соответствии с уравнением (5.27) предполагает, что $r \geqslant m+1$, как для случая с одним входом, рассмотренного в разд. 5.1. Поскольку для всех i рассматривается одна и та же матрица измерений $\mathbf{U}$ [i обозначает i-ю строку уравнения (5.18)], все элементы матрицы $\mathbf{A}$ можно полностью идентифицировать по $m+1$ измерениям; при этом одновременно идентифицируется $\mathbf{a}_i$ для всех i.

5.3. Регрессионная идентификация линейных динамических процессов

Линейные динамические системы можно описать следующим уравнением состояния:

$$\dot{\mathbf{x}} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{u}, \tag{5.28}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ — n-мерный вектор состояния и m-мерный вектор управления (вход) соответственно. В дискретной форме уравнение (5.28) может быть записано так:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \tag{5.29}$$

где $t = k\Delta t$, и

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \cong \mathbf{I} + \Delta t \cdot \alpha,$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \ldots b_{1m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \ldots b_{nm} \end{bmatrix} \cong \Delta t \cdot \beta.$$

Введем теперь

$$\mathbf{w}_k \triangleq (x_{1,k} \ldots x_{n,k}; u_{1,k} \ldots u_{m,k})^T \triangleq (w_{1,k} \ldots w_{n+m,k})^T \equiv$$

$$\equiv (n+m) \cdot \text{единичный вектор}, \tag{5.30}$$

$$\Phi \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n}, b_{11} \ldots b_{1m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn}, b_{n1} \ldots b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Phi_1)^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\Phi_n)^T \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Следовательно, уравнение (5.29) запишется в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{w}_k, \tag{5.32}$$

что аналогично уравнению (5.18) из разд. 5.2. Если запомнить r единовременных совокупностей измерений ($r \geqslant n+m+1$) величин $\mathbf{x}_{k+1}$ $\mathbf{w}_k$ (т. е. $\mathbf{x}_{k+1}$, $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{u}_k$), то элементы матрицы $\mathbf{\Phi}$ можно идентифицировать с помощью линейной регрессионной процедуры по методу наименьших квадратов из разд. 5.1 и 5.2. Следовательно, оценка $\hat{\mathbf{\Phi}}_i^*$ i-й строки матрицы $\mathbf{\Phi}$ ($i=1,\ldots,n$) по методу наименьших квадратов задается соотношением

$$(\hat{\mathbf{\Phi}}_i^*)^T = [(\mathbf{W}_k)^T \mathbf{W}_k]^{-1} (\mathbf{W}_k)^T \chi_{i,k+1} = [a_{1,i} \ldots a_{ni}, b_{1i} \ldots b_{mi}], \tag{5.33}$$

где по аналогии с уравнением (5.25)

$$\mathbf{W}_k \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} w_{1(1)k} \ldots w_{m+n(1)k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{1(r)k} \ldots w_{m+n(r)k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1(1)k} \ldots x_{n(1)k}, u_{1(1)k} \ldots u_{m(1)k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1(r)k} \ldots x_{n(r)k}, u_{1(r)k} \ldots u_{m(r)k} \end{bmatrix}, \tag{5.34}$$

$$\chi_{i,k+1} = [x_{i(1)k+1} \ldots x_{i(\mu)k+1} \ldots x_{i(r)k+1}]^T. \tag{5.35}$$

Здесь $x_{i(\mu)k+1}$ обозначает μ-е измерение i-го состояния $\mathbf{x}_{k+1}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, r$), а r — число измерений $\mathbf{W}_k$, $\mathbf{x}_{k+1}$. Видно, что для идентификации $\mathbf{\Phi}$ необходимо запомнить r величин $\mathbf{x}_{k+1}$ и r единовременных совокупностей измерений векторов $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{u}_k$, принадлежащих к предыдущему промежутку интегрирования Δt (обозначенных через $\mathbf{w}_k$). Иногда возможно измерять и запоминать несколько совокупностей значений $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ в течение Δt (с интервалом $\tau = \nu \Delta t$, где $1/\nu$ — целое число), если на каждом интервале измерений текущий вектор $\mathbf{x}_k$ объединяется в пару с вектором $\mathbf{w}_k$, измеренных на ν интервалов измерений раньше, чтобы получить $\mathbf{x}_{k+1}$ и $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{u}_k$, как это требуется для идентификации $\mathbf{\Phi}$. Следовательно, $u_{j(\mu),k}$ принадлежит к совокупности измерений, полученной на $r-m$ интервалов измерений раньше, чем $\mathbf{u}_{j,(r),k}$, и на $\nu+r-\mu$ интервалов измерений раньше, чем $\mathbf{x}_{i,(r),k+1}$. Вообще для идентификации $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ в соответствии с уравнением (5.33) требуется запомнить $2r$ измерений $\mathbf{x}$ и r измерений $\mathbf{u}$.

В приведенном выше выводе предполагается, что вектор состояния $\mathbf{x}$ может быть измерен. Однако в общем случае можно измерить лишь выходной вектор $\mathbf{y}$, который равен

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \tag{5.36}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор шума.

Поэтому с учетом результатов анализа наблюдаемости, приведенного в гл. 2, можно сделать вывод, что если некоторые элементы матрицы $\mathbf{C}$ в уравнении (5.36) равны 0, то непосредствен-

ная идентификация **A**, **B** по измерениям **y** становится невозможной. Однако, поскольку идентифицируемая система предполагается наблюдаемой, матрицы **A** и **B** могут быть идентифицированы по соотношению вход/выход, как это делается ниже, в разд. 5.4, а преобразование к **A**, **B** может быть проведено по алгоритму из разд. 2.5. Далее, если размерность n вектора состояния **x** заранее не известна, то ее можно определить методом идентификации с помощью передаточных функций из разд. 5.4, выполнив преобразования так, как это показано в разд. 2.5. Влияние шума обсуждается в разд. 5.4.2.

5.4. Построение моделей систем с помощью передаточных функций

5.4.1. Модели в терминах вход/выход

При идентификации с помощью регрессионного метода в разд. 5.3 система представляется в пространстве состояний уравнениями (5.28) и (5.29). Если необходимо идентифицировать модель, описанную передаточной функцией, то можно преобразовать модель в пространстве состояний, которая идентифицируется по методу из разд. 5.3, в модель, представленную передаточной функцией, как это описано в разд. 2.5. Возможен также и другой способ идентификации, в котором используется представление модели процесса в виде передаточной функции обобщенного вида [11]

$$G_i(s) = \frac{e^{\tau_i s}(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0)_i}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + 1)_i} = \frac{x}{u_i} \qquad (5.37)$$

для некоторых входов u_i и измеряемого выхода x.

Хотя эти рассуждения относятся к детерминированным входам и выходам, представление в виде передаточной функции (5.37) справедливо также для стохастических систем, где u — недоступная для измерения шумовая последовательность. В этом случае дискретный вариант уравнения (5.37) приводит к модели, известной в литературе как смешанная авторегрессионная динамическая модель скользящего среднего [12], которая используется в разд. 5.4.2 для идентификации входного и выходного шумов и обсуждается затем в гл. 12.

В настоящем разделе будут рассмотрены модели, записанные с помощью передаточных функций в дискретной форме и потому более удобные для анализа на цифровых вычислительных машинах. Иначе говоря, из уравнения (5.37) с использованием z-преобразования будет получена дискретная модель, которая выражена через передаточную функцию и будет в дальнейшем идентифицирована.

Рассмотрим систему уравнений (5.37), описанную во временно́й области (для $u_i \triangleq u$):

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t-\tau)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{du(t-\tau)}{dt} + b_0 u(t-\tau). \quad (5.38)$$

Уравнение (5.38) может быть аппроксимировано с помощью конечных разностей, когда dx/dt представляется в виде $[x(t) - x(t-T)]/T$. Учитывая (см. разд. 2.5.1), что z^{-1} является оператором сдвига (задержки), можно записать

$$\frac{x(t) - x(t-T)}{T} = \frac{(1 - z^{-1}) x(t)}{T}. \quad (5.39)$$

Используя обозначение оператора сдвига Бокса, Дженкинса и Бекона [12, 13], где

$$B \triangleq z^{-1}, \quad (5.40)$$

запишем уравнение (5.39) в виде

$$\frac{x(t) - x(t-T)}{T} = \frac{(1 - B) x(t)}{T}. \quad (5.41)$$

Подставляя

$$\tau \triangleq pT, \quad (5.42)$$

можно приближенно записать уравнение (5.38) в виде

$$(\alpha_n B^n + \alpha_{n-1} B^{n-1} + \ldots + \alpha_1 B + 1) x(t) = B^p (\beta_m B^m + \beta_{m-1} B^{m-1} + \\ + \ldots + \beta_1 B + \beta_0) u(t). \quad (5.43)$$

Теперь легко могут быть получены соотношения между $\alpha_i (\forall i = 1, \ldots, n)$, $\beta_j (\forall j = 0, \ldots, m)$ и $a_i (\forall i = 1, \ldots, n)$, $b_j (\forall j = 0, \ldots, m)$.

В тех случаях, когда имеется несколько входов, для каждого из них можно построить модель вида (5.43), записав в этом уравнении $u_i(t)$ вместо $u(t)$. Модель, описываемая уравнением (5.43), остается адекватной для каждого выхода даже в случае процесса с несколькими независимыми входами. Докажем, что эта модель также адекватна для случаев, когда система имеет несколько взаимосвязанных выходов.

Рассмотрим систему, имеющую два взаимосвязанных выхода $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Модель в виде дискретной передаточной функции для этой системы задается соотношениями

$$x_1(t) = \alpha_1 x_1(t-1) + \beta_1 x_2(t-1) + \gamma_1 u(t-1) + \alpha_2 x_1(t-2) + \\ + \beta_2 x_2(t-2) + \gamma_2 u(t-2) + \alpha_3 x_1(t-3) + \ldots, \quad (5.44а)$$

$$x_2(t) = \delta_1 x_1(t-1) + \varepsilon_1 x_2(t-1) + \eta_1 u(t-1) + \delta_2 x_1(t-2) + \\ + \varepsilon_2 x_2(t-2) + \eta_2 u(t-2) + \delta_3 x_1(t-3) + \ldots. \quad (5.44б)$$

Подставляя x_2 из уравнения (5.44б) в уравнение (5.44а), получаем

$$(1-\alpha_1 B-\alpha_2 B^2-\ldots)\,x_1=\frac{(\delta_1 B+\ldots)(\beta_1 B+\ldots)\,x_1}{1-\varepsilon_1 B+\varepsilon_2 B^2-\ldots}+$$
$$+\left(\gamma_1 B+\gamma_2 B^2+\ldots+\frac{(\eta_1 B+\ldots)(\beta_1 B+\ldots)}{1-\varepsilon_1 B+\varepsilon_2 B^2-\ldots}\right)u, \quad (5.45)$$

что дает

$$(1+\xi_1 B+\xi_2 B^2+\cdots)\,x_1=(\omega_1 B+\omega_2 B^2+\cdots)\,u. \quad (5.46)$$

Последнее выражение представляет x_1 в терминах лишь его предыстории и предыстории входного сигнала, так же как в случае одного выхода.

Следует отметить, что степени n, m и p должны быть известны. Однако в общем случае можно предположить некоторый наивысший возможный порядок N для n и M для $m+p$. Тогда коэффициенты регрессии можно вычислить из уравнения

$$(\alpha_n B^n+\alpha_{n-1}B^{n-1}+\cdots+\alpha_1 B+1)\,x(t)=(\gamma_{m+p}B^{m+p}+$$
$$+\gamma_{m+p-1}B^{m+p-1}+\cdots+\gamma_1 B+\gamma_0)\,u(t), \quad (5.47)$$

что позволяет идентифицировать параметры модели в виде передаточной функции по измеренным значениям $x(t)$, $u(t)$. Оценка порядков m, n, p уравнения (5.47) начинается с идентификации α_i, γ_i для некоторых m, $n+p$; затем итерации продолжают до тех пор, пока не получат близкую к минимальному значению сумму квадратов ошибок между измеренным выходом и вычисленным (по модели при данных m, $n+p$) выходом для наименьшего значения $m+n+p$. Наконец, после перегруппировки полиномов, стоящих в левой и правой частях уравнения (5.47), получают n, m и p, такие, что, когда удовлетворяется соотношение

$$\gamma_j=0, \quad \forall j=0,\ldots,q, \quad (5.48а)$$

порядок p определяется выражением

$$p=q+1, \quad (5.48б)$$

а β_m из уравнения (5.43) определяется условием

$$\beta_\mu=\gamma_{q+1+\mu}, \quad \forall\mu=0,1,\ldots,m. \quad (5.48в)$$

Для первоначальных оценок наивысших порядков n_0, m_0+p_0 максимальное число требующихся итераций составляет $1+\log_2(m_0+n_0+p_0)$, если величина n_0 или m_0+p_0 сокращается вдвое при каждой итерации.

Отметим, что термин «смешанная авторегрессионная модель скользящего среднего» непосредственно связан с уравнением (5.47), поскольку при $\gamma_1=\ldots\gamma_{m+p}=0$ это уравнение можно рас-

сматривать как уравнение регрессии для x и его предыдущих значений, так что α_i оказываются коэффициентами авторегрессии. Однако при $\alpha_i=0\ \forall i$ и $\gamma_j\neq 0$ это уравнение становится уравнением скользящего среднего, где γ_j — коэффициенты скользящих средних, если $u(t)$ — недетерминированная функция.

В работе [12] детально рассматривается идентификация описанных выше моделей, представленных дискретными передаточными функциями. Эта работа в основном посвящена выводу смешанной авторегрессионной прогнозирующей модели скользящего среднего (связывающей в форме z-преобразования сигнал, который необходимо прогнозировать, т. е. выход системы, с неизмеряемым некоррелированным случайным шумом на входе). Подходы, приводящие к подобным прогнозирующим моделям, предназначенным для идентификации в реальном масштабе времени, обсуждаются в разд. 12.6 настоящей книги. Распространение таких моделей на случай нестационарных последовательностей и систем, записанных в терминах вход/выход, также обсуждается в гл. 12 (см. разд. 12.7).

5.4.2. Модели шума на входе и выходе

Рассмотренные ранее в разд. 5.4.1 модели были записаны только в терминах соотношений вход/выход, причем функция $u(t)$ обозначала измеренный вход. Исследуем теперь случай, когда требуется провести идентификацию обратимой системы[1]), описываемой соотношением

$$(\alpha_R B^R + \cdots + \alpha_1 B + 1)\, x_k = (\gamma_m B^m + \cdots + \gamma_0)\, u_k + v_k, \qquad (5.49а)$$

где x_k, u_k — измеряемые выход и вход соответственно, а v_k — последовательность шума, некоррелированная с u_k. Уравнение (5.49а) можно переписать в операторной форме

$$x_k = \eta(B)\, u_k + \Omega(B)\, v_k = \eta(B)\, u_k + \omega_k. \qquad (5.49б)$$

Задача идентификации при $u_k=0$ в уравнении (5.49б) обсуждается ниже в разд. 12.6 и 12.7, где рассматривается состоятельная идентификация[2] (т. е. такая, когда вероятность получения истинного значения параметра при $k\to\infty$ равна 1), что позволяет выразить неизмеряемую последовательность v_k в виде последовательности типа белого шума n_k, для которой

$$(\alpha_R B^R + \cdots + \alpha_1 B + 1)\, x_k = (\delta_s B^s + \cdots + \delta_0)\, n_k. \qquad (5.49в)$$

[1] См. разд. 12.6.1, где обсуждается понятие обратимости.

[2] Под состоятельной оценкой $\hat{x}_k$ понимается оценка, которая сходится по вероятности, т. е. удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Prob}(|\hat{x}_k - x| < \varepsilon) = 1\ \forall \varepsilon > 0$.

Наша задача состоит в идентификации α_i, γ_j, δ_v в уравнении

$$(\alpha_R B^R + \cdots + 1) x_k = (\gamma_m B^m + \cdots + \gamma_0) u_k + \\ + (\delta_s B^s + \cdots + \delta_0) n_k. \qquad (5.49г)$$

В тех случаях, когда присутствуют одновременно измеряемый вход u_k и неизмеряемое случайное входное воздействие v_k, идентификация может быть проведена состоятельно, если сначала идентифицировать η_i в соответствии с процедурой, описанной в разд. 5.4.1 (без δ_v), а затем δ_v по погрешностям r_k предыдущей модели, где

$$r_k \stackrel{\Delta}{=} x_k - \hat{x}_k, \qquad (5.50а)$$

$$\hat{x}_k = (\eta_p B^p + \cdots + \eta_0) u_k. \qquad (5.50б)$$

Следовательно, процедура идентификации последовательности погрешностей r_k эквивалентна идентификации для уравнения (5.49в), а именно процедуре, описанной в разд. 12.6.

Можно показать, что указанная комбинированная процедура идентификации параметров модели шума на входе и выходе по уравнению (5.49г) является состоятельной.

Для этого напомним сначала, что ранее в разд. 5.4.1 идентификация α_i, β_j предполагалась состоятельной, поскольку модель (5.47) обеспечивала минимум квадрата ошибки. Эта минимальная ошибка r_k, очевидно, равна ω_k из уравнения (5.49б). Однако, если погрешность $\eta(B)$ в уравнении (5.49б) идентифицирована неверно и определена равной $\eta'(B)$, то погрешность идентификации описывается выражением

$$r_k = \omega_k + [\eta(B) - \eta'(B)] u(k). \qquad (5.51)$$

Ожидаемый квадрат ошибки для точной идентификации η при $h \to \infty$ определяется соотношением

$$J' = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} \omega_k^2, \qquad (5.52а)$$

а для случая уравнения (5.51) он оказывается равным

$$J'' = \frac{1}{h} \sum_{k} \{\omega_k + [\eta(B) - \eta'(B)] u_k\}^2. \qquad (5.52б)$$

Так как последовательность u_k не коррелирована с ω_k, то

$$J'' = \frac{1}{h} \sum_{k} \{\omega_k^2 + [[\eta(B) - \eta'(B)] u_k]^2\} = J' + \Delta J', \qquad (5.52в)$$

где $\eta(B)$, $\eta'(B)$ имеют постоянные коэффициенты и $\Delta J' \geqslant 0$. Следовательно, если погрешность r_k в уравнении (5.51) коррелирована с u_k (в случае неверной идентификации), то математическое ожидание ошибки возрастает по сравнению со случаем точной идентификации. Далее, в разд. 12.6 показано, что при идентификации величин ε_μ, δ_v в модели погрешностей

$$(\varepsilon_Q B^Q + \cdots + \varepsilon_1 B + 1) r_k = (\delta_s B^s + \cdots + \delta_0) n_k \qquad (5.53)$$

с использованием процедуры из разд. 12.6 и 12.7 ожидаемый квадрат ошибки прогноза задается выражением $(1/h) \sum_{i=1}^{h} n_k^2$, пока $r_k = \omega_k$. Однако если r_k содержит, как в уравнении (5.51), члены с u_k, не коррелированные с ω_k, то задача идентификации превращается в задачу идентификации параметров предсказателя для двух некоррелированных последовательностей, одна из которых представляет собой ω_k, а другая $[\eta(B) - \eta'(B)]u_k$. Ошибка прогноза этой модели для $[\eta(B) - \eta'(B)]u_k$, очевидно, не коррелирована с последовательностью типа белого шума n_k, которая является ошибкой прогноза для модели ω_k. Следовательно, ожидаемый квадрат ошибки прогноза для неверной идентификации $\eta(B)$ равен $(1/h) \sum_{k=1}^{h} n_k^2 + \Delta J''$, где $\Delta J'' \geqslant 0$. Поскольку ошибка прогноза погрешности представляет собой общую ошибку прогноза модели шума на входе и выходе, то независимо от параметров модели погрешностей любая ошибка идентификации $\eta(B)$ увеличивает математическое ожидание общей ошибки прогноза. Поэтому состоятельная идентификация одной модели вход/выход и последующая состоятельная идентификация модели погрешностей образуют состоятельный комбинированный метод, в котором используются те же данные. Ниже, в разд. 12.6, показано, что идентификация указанной выше модели шума является состоятельной независимо от распределения шума, хотя в случае негауссовских шумов это справедливо лишь для линейной модели.

5.5. Идентификация по критерию минимума дисперсии и функция правдоподобия

Рассмотрим систему, описываемую соотношением

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{n}, \qquad (5.54а)$$

где $\mathbf{z}$ и $\mathbf{n}$ — k-мерные векторы измерений и шума измерений соответственно, а k обозначает порядковый номер измерений. Кроме того,

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{a}, \qquad (5.54б)$$

где **U**, **x** и **a** — соответственно матрицы входа, выхода и параметров модели аналогично уравнению (5.10а).

Предположим, что известно множество k измерений, а вектор **n** имеет совместное с ним гауссовское распределение

$$p(\mathbf{n}) = f(\mathbf{N}, k) \exp\left(-\mathbf{n}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}/2\right), \tag{5.55а}$$

$$E(\mathbf{n}) = \mathbf{0}, \tag{5.55б}$$

$$E(\mathbf{n}\mathbf{n}^T) = \mathbf{N}. \tag{5.55в}$$

Здесь E — оператор математического ожидания, а f является скалярной функцией **N**, k. Следовательно, *если математическое ожидание* **N** *априорно известно*, то можно получить марковскую линейную оценку, минимизирующую дисперсию вектора параметра **a** из уравнения (5.54б) следующим образом [5].

Замечая в уравнениях (5.54а), (5.54б), что оценка $\hat{\mathbf{a}}$ параметра **a** связана с $\hat{\mathbf{n}}$ соотношением

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}, \tag{5.56}$$

определим *функцию правдоподобия* $p(\hat{\mathbf{n}})$, такую, что

$$p(\hat{\mathbf{n}}) = p(\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}). \tag{5.57}$$

Следовательно, оценка $\hat{\mathbf{a}}$ вектора **a**, максимизирующая $\ln[p(\hat{\mathbf{n}})]$, задается выражением

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{a}}} [\ln[p(\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})]] = 0, \tag{5.58}$$

где $p(...)$ обозначает вероятность. Воспользовавшись выражением для $p(\mathbf{n})$ из уравнения (5.55), получим

$$\ln[p(\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})] = \ln[f(\mathbf{N}, k)] - (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})/2. \tag{5.59}$$

С учетом этого уравнение (5.58) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{a}}} [(\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})] = \mathbf{0}. \tag{5.60}$$

Из уравнения (5.60) следует

$$\mathbf{U}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{U}\mathbf{a}^* - \mathbf{U}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{0}, \tag{5.61а}$$

или для невырожденных матриц $(\mathbf{U}_T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{U})$

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{U}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{z}. \tag{5.61б}$$

Здесь $\mathbf{a}^*$ — линейная оценка **a**, обеспечивающая минимум дисперсии (марковская оценка), которая является безусловной

оценкой по методу максимального правдоподобия [12] для гауссовской случайной величины $\mathbf{n}$, поскольку она максимизирует функцию правдоподобия в уравнении (5.57).

Отметим, что оценка z^* в уравнении (5.61б), обеспечивающая минимум дисперсии, на самом деле представляет собой взвешенную регрессионную оценку, весовая матрица $\mathbf{N}^{-1}$ которой вводится в регрессионную оценку по методу наименьших квадратов (5.16). Поэтому

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{z}. \qquad (5.62)$$

Очевидно, что если не имеется никакой априорной информации об $\mathbf{N}$ (как и бывает в общем случае), то можно предположить, что $\mathbf{N}=\sigma^2\mathbf{I}$ (σ — скаляр), так что уравнения (5.61б) и (5.62) становятся идентичными. Однако если ковариация различных составляющих $\mathbf{n}$ априорно известна, то оценка $\mathbf{a}$ определяется по уравнению (5.61б).

Для гауссовского вектора $\mathbf{n}$, когда $\mathbf{n}$ независим, т. е. для $\mathbf{N}=\sigma^2\mathbf{I}$, регрессионная оценка по методу наименьших квадратов является оценкой, обеспечивающей максимум правдоподобия. Поэтому для приведенных выше условий оценки по методу наименьших квадратов обладают теми же свойствами, что и оценки по методу максимального правдоподобия. Следовательно, они являются несмещенными (т. е. для достаточного числа измерений $E[\mathbf{a}^*]$ равно $\mathbf{a}$) и состоятельными. Они также эффективны (т. е. в предположении о несмещенности для любого достаточно большого числа измерений они дают оценки параметров, обеспечивающие минимум дисперсии ошибок в результатах вычислений, полученных по любым возможным параметрам при известных данных по сравнению с фактическими измерениями).

Отметим, что при идентификации смешанных авторегрессионных гауссовских процессов скользящего среднего, описываемых уравнениями с шумовыми членами, которые обеспечивают сдвиг среднего значения, любая оценка параметров авторегрессии по методу наименьших квадратов, выполненная изолированно, не эффективна, так как не учитывает других параметров. Эта оценка не является оценкой максимального правдоподобия, поскольку на основе преобразования смешанной авторегрессионной модели скользящего среднего (по методу, рассмотренному в разд. 2.5) получается многомерный вектор шума $\mathbf{n}$. Этот вектор не является независимым, и для него имеет место неравенство $\mathbf{N}\neq\sigma^2\mathbf{I}$ до тех пор, пока присутствуют члены, вызывающие сдвиг среднего значения.

5.6. Регрессионная идентификация нелинейных процессов

Как статические, так и динамические процессы могут обладать нелинейными характеристиками, которые нельзя игнориро-

вать. Если имеется априорная информация о типе нелинейности, то параметры «истинных» нелинейных функций могут быть идентифицированы. Примером этого могут служить случаи, когда из теоретических соображений известно, что в рассматриваемом процессе между некоторыми переменными, например между скоростью W и давлением P, существует экспоненциальная зависимость вида $W=k_1 \exp(k_2 P)+k_3$, в которой k_1, k_2 и k_3 необходимо идентифицировать. Если тип нелинейной функции неизвестен, то аппроксимация истинной нелинейности может быть выполнена, например, с помощью полиномов. Однако во всех случаях идентификацию можно проводить *только* в предположении некоторого специфического типа нелинейной аппроксимирующей функции, параметры которой подлежат идентификации. Следовательно, задача идентификации опять является задачей оценки параметров априорно заданной функции. В данном разделе делается попытка найти подход к решению двух видов нелинейных задач идентификации (когда тип нелинейной функции известен заранее и когда он описан приближенно) путем использования методов нелинейной регрессии и обсудить тип аппроксимирующих функций, обеспечивающих адекватную аппроксимацию.

5.6.1. Аппроксимация с помощью полиномов

Для описания методов идентификации нелинейных процессов с помощью регрессии рассмотрим сначала аппроксимацию полиномом третьего порядка по методу наименьших квадратов некоторого динамического процесса, имеющего две переменные состояния x_1, x_2 и одну управляющую переменную u:

$$x_{i,k+1} = a_{i1}x_{1,k} + a_{i2}x_{1,k}^2 + a_{i3}x_{1,k}^3 + b_{i1}x_{2,k} + b_{i2}x_{2,k}^2 + b_{i3}x_{2,k}^3 + c_{i1}u + c_{i2}u^2 + c_{i3}u^3 \quad \text{при} \quad i = 1, 2. \tag{5.63}$$

Отметим, что в соответствии с теоремой Вейерштрасса [14] непрерывные нелинейные функции x могут быть аппроксимированы полиномами x, такими, которые сходятся к исходным функциям. Для того чтобы облегчить применение процедуры регрессионной идентификации к процессу (5.63), введем векторы z и α_i:

$$z \overset{\Delta}{=} [z_1\ z_2\ z_3\ z_4\ z_5\ z_6\ z_7\ z_8\ z_9]^T \overset{\Delta}{=} [x_{1k}\ x_{1k}^2\ x_{1k}^3\ x_{2k}\ x_{2k}^2\ x_{2k}^3\ u_k\ u_k^2\ u_k^3]^T, \tag{5.64а}$$

$$\alpha_i \overset{\Delta}{=} (\alpha_{i,1} \cdots \alpha_{i,9})^T = (a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ b_{i1}\ b_{i2}\ b_{i3}\ c_{i1}\ c_{i2}\ c_{i3})^T. \tag{5.64б}$$

С учетом этого уравнения (5.63) можно записать в виде

$$x_{i,k+1} = z^T \cdot \alpha_i, \tag{5.65}$$

что полностью аналогично уравнениям (5.5) и (5.6) из разд. 5.1 и, следовательно, является формой линейной регрессии. Элементы $\boldsymbol{\alpha}$ полиномиального выражения третьего порядка, образованного по методу наименьших квадратов и используемого для аппроксимации данного процесса, вычисляются с помощью формул (5.5)—(5.16). В этих формулах x, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{a}$ заменяются соответственно на x_{1k+1}, $\mathbf{z}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ из уравнений (5.64) и (5.65). Следовательно, $\mathbf{x}$, $\mathbf{U}$ из уравнений (5.7) и (5.8) выражаются через $x_{i,k+1}$ и через компоненты $\mathbf{z}$, а α_i задается уравнением (5.64).

Если рассматривается аппроксимация с помощью полиномов более высокого порядка, чем в уравнении (5.63), то применяется тот же подход, что и в уравнениях (5.63)—(5.65), но с использованием большего числа членов. Этот подход, очевидно, применим также к статическим процессам [т. е. когда индексы k, $k+1$ в уравнении (5.63) опускаются]. Указанный подход может быть использован в принципе для большего числа переменных, чем имеется в уравнении (5.63).

В некоторых случаях необходимо идентифицировать коэффициенты аппроксимирующих полиномов, выраженных через степени *функций* переменных процесса, а не через степени самих переменных, т. е.

$$x_{i,k+1} = a_{i1} f(x_{1k}) + a_{i1} f^2(x_{1k}) + a_{i3} f^3(x_{1k}) + b_{i1} f(x_{2k}) + \\ + b_{i2} f^2(x_{2k}) + b_{i3} f^3(x_{2k}) + c_{i1} f(u_k) + c_{i2} f^2(u_k) + c_{i3} f^3(u_k). \quad (5.66)$$

В этом случае компоненты вектора $\mathbf{z}$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{z} \stackrel{\Delta}{=} [z_1, z_2, \ldots, z_9]^T \stackrel{\Delta}{=} [f(x_{1k}), f^2(x_{1k}), f^3(x_{1k}), \ldots, f^3(u_k)]^T, \quad (5.67)$$

а остальные выкладки будут те же, что и для уравнения (5.63). В случаях когда идентифицируемый полином содержит члены со смешанными переменными, например вида

$$x_{i,k+1} = a_{i1} x_{1k} + a_{12} x_{1k} x_{2k} + a_{13} x_{1k}^2 + \cdots, \quad (5.68)$$

компоненты $\mathbf{z}$ определяются выражением

$$\mathbf{z} \stackrel{\Delta}{=} [z_1, z_2, z_3 \cdots]^T = [x_{1k}, x_{1k} \cdot x_{2k}, x_{1k}^2, \ldots]^T, \quad (5.69)$$

а дальнейшие выкладки проводятся так же, как и в уравнении (5.63). По аналогии со случаями линейной регрессии (разд. 5.1—5.3) потребуем, чтобы число измерений составляло $r \geqslant \omega + 1$, где ω соответствует размерности $\mathbf{z}$ в уравнениях (5.64) или (5.67), что облегчает определение $\boldsymbol{\alpha}_i$ в уравнении (5.65), позволяя избежать согласования измерений с аппроксимирующей моделью.

Подробный вывод обобщенной модели динамической системы с неизвестными нелинейностями, базирующийся на применении рядов Вольтерра, приведен в разд. 7.3. Довольно громозд-

кая форма записи этой модели требует применения последовательных методов идентификации, описанных в гл. 6, 7.

5.6.1а. Представление с помощью ортогональных полиномов. Из множества полиномиальных выражений, используемых для аппроксимации нелинейных процессов, особого внимания заслуживают ортогональные полиномы. Эти полиномы обладают рядом свойств, делающих их особо привлекательными для сглаживания данных, характеристики которых априорно неизвестны. Некоторые из этих свойств [15] обсуждаются ниже.

1. Благодаря свойству ортогональности вычисление коэффициентов полиномиального уравнения, аппроксимирующего процесс, осуществляется *быстрее*, чем для неортогональных полиномов. Это свойство наиболее важно для вычислений вручную, хотя и при машинных вычислениях оно существенно экономит время счета.

2. Коэффициенты полиномиального аппроксимирующего уравнения *не зависят от порядка* исходного полиномиального уравнения; следовательно, при отсутствии априорной информации о порядке полинома можно проверить несколько порядков, причем все коэффициенты, полученные при низшем порядке, остаются действительными и для высшего. Это свойство наиболее важно при выборе наилучшего порядка аппроксимирующего полинома.

3. Одним из свойств полиномов Чебышева, наиболее широко использующихся в качестве ортогональных полиномов для нелинейной аппроксимации, является их *свойство почти равных ошибок*. Это свойство [15] заключается в том, что ошибка аппроксимации колеблется внутри диапазона измерений между двумя почти одинаковыми пределами (рис. 5.3). Благодаря этому свойству не могут возникать очень большие ошибки, например выбросы за пределы диапазона данных, для которых проводится аппроксимация; наоборот, в большинстве своем ошибки малы. Таким образом, осуществляется «демпфирование» ошибок аппроксимации.

Чтобы проиллюстрировать метод идентификации нелинейных процессов с помощью аппроксимирующих ортогональных полиномов, рассмотрим следующее аппроксимирующее уравнение относительно $\hat{y}$ и x для одномерной системы:

$$\hat{y}(x) = b_0 F_0(x) + b_1 F_1(x) + \cdots + b_m F_m(x). \qquad (5.70)$$

Здесь x, $\hat{y}$ обозначают входную и оцениваемую выходную переменные нелинейного процесса соответственно (в задачах предсказания или сглаживания временных рядов x может обозначать

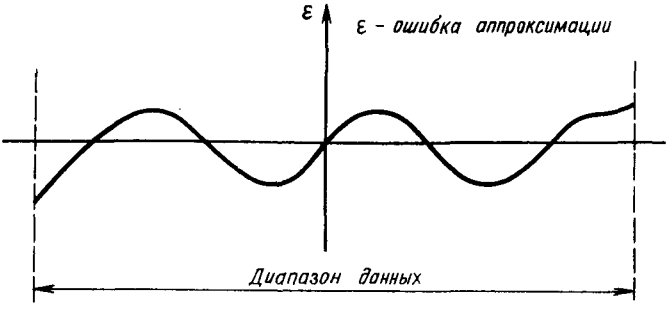


Рис. 5.3. Свойство почти равномерной ошибки аппроксимации при использовании полиномов Чебышева.

время). В данном случае $F_\nu(x)$ обозначает ортогональный полином порядка ν ($\nu=1,\ldots, m$), обладающий свойством ортогональности, т. е.

$$\sum_{i=0}^{r} F_\mu(x_i)\, F_\nu(x_i) = 0, \quad \forall \mu \neq \nu, \tag{5.71а}$$

или в обобщенном виде

$$\int_a^b w(x)\, F_\mu(x)\, F_\nu(x)\, dx = 0, \quad \forall \mu \neq \nu, \tag{5.71б}$$

где μ, ν — неотрицательные целые числа, а r — число измерений.

Для идентификации коэффициентов b_j в уравнении (5.70) потребуем опять, чтобы $r \geqslant m+1$, так как при $r=m$ аппроксимирующий полином формировался бы в соответствии с измерениями и никакого сглаживания этих измерений не осуществлялось бы.

Как указано выше (см. свойство 3), при аппроксимации с помощью ортогональных полиномов наиболее целесообразно использовать полиномы Чебышева. Полиномы Чебышева записываются в форме

$$F_\nu(\xi) = T_\nu(\xi) = \cos(\nu \cdot \arccos \xi), \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{5.72}$$

и обладают следующими взвешенными свойствами ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_\mu(\xi)\, T_\nu(\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu \neq \nu, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad \mu = \nu \neq 0, \\ \pi & \text{при} \quad \mu = \nu = 0, \end{cases} \tag{5.73}$$

где $\sqrt{1-\xi^2}$ — весовой коэффициент $\omega(\xi)$ из уравнения (5.71б). Несколько полиномов Чебышева низкого порядка приведены для примера в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Полиномы Чебышева $T_\nu(\xi)$ порядка от 0 до 6

$$T_0(\xi) = 1$$
$$T_1(\xi) = \xi$$
$$T_2(\xi) = 2\xi^2 - 1$$
$$T_3(\xi) = 4\xi^3 - 3\xi$$
$$T_4(\xi) = 8\xi^4 - 8\xi^2 + 1$$
$$T_5(\xi) = 16\xi^5 - 20\xi^3 + 5\xi$$
$$T_6(\xi) = 32\xi^6 - 48\xi^4 + 18\xi^2 - 1$$

$$T_{\nu+1}(\xi) = 2\xi T_\nu(\xi) - T_{\nu-1}(\xi)$$

Независимая переменная [x в уравнении (5.70)] обычно должна быть преобразована так, чтобы она удовлетворяла требованиям к области изменения ξ в уравнении (5.72). При известном $T_\nu(\xi)$ значение $T_{\nu+1}(\xi)$ может быть определено из соотношения

$$T_{\nu+1}(\xi) = 2\xi T_\nu(\xi) - T_{\nu-1}(\xi), \tag{5.74}$$

что следует из определения $T_\nu(\xi)$ в уравнении (5.72).

Аппроксимационный полином Чебышева для $\hat{y}$, составленный по методу наименьших квадратов для выходной переменной y, получают на основе минимизации S, где

$$S = \int_{-1}^{1} w(\xi)\left[y(\xi) - \sum_{i=0}^{m} b_i T_i(\xi)\right]^2 d\xi, \tag{5.75}$$

что дает

$$b_k = \left[\int_{-1}^{1} w(\xi)\, y(\xi)\, T_k(\xi)\, d\xi\right] \Big/ \left[\int_{-1}^{1} w(\xi)\, T_k^2(\xi)\, d\xi\right] =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{y(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi & \text{при} \quad k = 0, \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{y(\xi)\, T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases} \tag{5.76}$$

так что

$$\hat{y}(\xi) = \sum_{k=0}^{m} b_k T_k(\xi). \tag{5.77}$$

Относительно простые алгоритмы для вычисления b_k получаются благодаря свойству ортогональности. Видно, что b_k в уравнении (5.76) *не зависит от выбора* m. Следовательно, изменение m не требует пересчета b_j, $\forall j \leqslant m$, тогда как этот пересчет при неортогональной аппроксимации необходим, что влечет за собой существенные затраты времени.

Кроме того, при

$$\xi_i = \cos[(2i+1)\pi/2n], \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5.78}$$

полиномы Чебышева обладают следующим свойством дискретной ортогональности для $\mu, \nu < n$ (см. [15]):

$$\sum_{j=0}^{n} T_\mu(\xi_j) \cdot T_\nu(\xi_i) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu \neq \nu, \\ \dfrac{n}{2} & \text{при} \quad \mu = \nu \neq 0, \\ n & \text{при} \quad \mu = \nu = 0. \end{cases} \tag{5.79}$$

Видно, что в уравнении (5.79) вес $\omega(\xi)$ из уравнения (5.71б) равен единице. Следовательно, величина $\omega(\xi)$ в уравнении (5.75) также равна единице, и можно вычислить коэффициенты b_k аппроксимационного полинома Чебышева $\hat{y}$ для y, минимизирующие S по формуле

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} \left[y(\xi_j) - \sum_{k=0}^{m} b_k T_k(\xi_j) \right]^2, \tag{5.80}$$

что дает

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y(\xi_j), \tag{5.81а}$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y(\xi_j) T_k(\xi_j). \tag{5.81б}$$

Таким способом эти коэффициенты вычисляются гораздо проще, чем по уравнению (5.76), хотя при этом требуется знать $y(\xi_i)$ при ξ_i, определяемых из уравнения (5.78).

Программы вычисления полиномов Чебышева или других ортогональных полиномов на ЦВМ подробно описаны в литературе [16]. Имеются также готовые программы на языке АЛГОЛ для аппроксимации кривых ортогональными полинома-

ми при равномерно и неравномерно распределенных данных [17]; подробные программы могут быть реализованы и на других алгоритмических языках.

Пример 5.1

С целью иллюстрации применения полиномов Чебышева для аппроксимации рассмотрим полином вида

$$y(\xi) = \xi^4, \ \forall |\xi| < 1.$$

Зададим число рассматриваемых точек n=3. Принимая во внимание уравнение (5.78), найдем

$$\xi_0 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \xi_1 = \cos\frac{3\pi}{6} = 0, \ \xi_2 = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

а затем в соответствии с уравнением (5.79) вычислим

$$b_0 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 0^4 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right] = \frac{3}{8},$$

$$b_1 = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^5 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right] = 0,$$

$$b_2 = \frac{2}{3}\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right] = \frac{3}{8}.$$

5.6.1б. Многомерные ортогональные полиномы. Ортогональные полиномы в *многомерных задачах* используются реже, чем в одномерных, из-за вычислительных сложностей, связанных с получением этих полиномов. Кроме того, наличие быстродействующих вычислительных машин делает актуальным применение последовательных методов оценки параметров, описанных ниже в гл. 6—8. Поэтому привлекательность использования ортогональных полиномов для оценки параметров по уравнениям типа (5.76), естественно, уменьшается. Тем не менее по аналогии с одномерным случаем существует следующее многомерное соотношение для ортогональных полиномов:

$$\int \cdots \int w(x_1, \ldots, x_n) F_{\mu, \nu, \ldots, \Omega}(x_1, \ldots, x_n) F_{\mu', \nu', \ldots, \Omega'} \times$$
$$\times (x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = 0, \ \forall \mu, \nu, \ldots, \Omega \neq \mu', \nu', \ldots, \Omega', \quad (5.82)$$

где $x_1, \ldots, x_n$ обозначают компоненты многомерного вектора $\mathbf{x}$, и поэтому выражение (5.82) аналогично приведенному в разд. 5.6.1а. Можно получить более удобную форму записи для $F_{\mu,\nu,\ldots\Omega}$, если положить

$$F_{\mu, \nu, \ldots, \Omega}(x_1, \ldots, x_n) = F_\mu(x_1) F_\nu(x_2) \ldots F_\Omega(x_n), \quad (5.83)$$

где F_μ, F_ν, ..., F_Ω — ортогональные одномерные полиномы. На ос-

новании этого в силу ортогональности $F_\mu(x)$ получим

$$\int \cdots \int w(x_1, \ldots, x_n) F_{\mu, \nu, \ldots, \Omega} F_{\mu', \nu', \ldots, \Omega'} dx_1 \cdots dxn =$$
$$= \int w_1 F_\mu(x_1) F_{\mu'}(x_1) dx_1 \int w_2 F_\nu(x_2) F_{\nu'}(x_2) dx_2 \cdots$$
$$\cdots \int w_n F_\Omega(x_n) F_{\Omega'}(x_n) dx_n = 0,$$
$$\forall \mu, \nu, \ldots, \Omega \neq \mu', \nu', \ldots, \Omega', \quad (5.84)$$

так что уравнение (5.82) удовлетворяется.

5.6.1в. Определение наилучшего порядка аппроксимирующего полинома. Наилучший порядок m^* аппроксимирующего полинома может быть получен на основании гипотезы [16] о том, что результаты измерений $y(i)$ [индекс (i) обозначает i-е измерение, $i=1, 2, 3, \ldots, r$] имеют независимое гауссовское распределение около некоторого полиномиального соотношения $\hat{y}$ порядка, например, $m^*+\mu$, где

$$\hat{y}_{m^*+\mu}(x_i) = \sum_{j=0}^{m^*+\mu} b_j x_i^j, \quad (5.85)$$

а дисперсия σ^2 этого распределения $y-\hat{y}$ не зависит от μ.

Очевидно, что для очень малых m ($m=0, 1, 2, \ldots$) σ_m^2 уменьшается с ростом m. Поскольку в рамках принятой раньше гипотезы дисперсия σ_m^2 не зависит от m, то наилучшим порядком m^* является наименьшее значение m, для которого $\sigma_m \cong \sigma_{m+1}$.

Для получения m^* требуется вычисление аппроксимирующих полиномов разных порядков. Поскольку b_j в уравнении (5.85) может зависеть от порядка полинома m, использование ортогональных аппроксимирующих полиномов уменьшает необходимость пересчета всех b_j для каждого m, как было показано выше, в разд. 5.6.1а.

5.6.2. Идентификация нелинейных функций априорно известного вида

Во многих случаях имеется нелинейная аналитическая модель, полученная на основе теоретических соображений, и требуется провести идентификацию ее параметров. В таких случаях регрессионный анализ можно применить следующим образом.

Рассмотрим процесс, описываемый выражением

$$y = a_0 + a_1 x_1 x_2^3 + a_2 x_2 \exp\left(-a_3 \frac{x_1^2}{x_3}\right) + \frac{a_4 x_4}{\sqrt{1 - a_5 x_5^2}}. \quad (5.86)$$

Для идентификации этого процесса введем сначала следующие новые переменные:

$$\zeta_1 \triangleq x_1 x_2^3,\ \zeta_3 \triangleq x_2,\ \zeta_5 \triangleq x_5,$$
$$\zeta_2 \triangleq x_1^2/x_3,\ \zeta_4 \triangleq x_4. \tag{5.87}$$

В итоге получим

$$y = a_0 + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 \exp(-a_3\zeta_2) + \frac{a_4\zeta_4}{\sqrt{1 - a_5\zeta_5^2}}. \tag{5.88}$$

Линеаризуем теперь уравнение (5.88) в предположении, что приращения его переменных малы (см. приложение 1):

$$\Delta y = a_1\Delta\zeta_1 - a_2a_3\zeta_3\exp(-a_3\zeta_2)\Delta\zeta_2 + a_2\exp(-a_3\zeta_2)\Delta\zeta_3 + \frac{a_4}{\sqrt{1 - a_5\zeta_5^2}}\Delta\zeta_4 + \frac{a_4a_5\zeta_4\zeta_5}{\sqrt{(1 - a_5\zeta_5^2)^3}}\Delta\zeta_5. \tag{5.89}$$

Вводя обозначения

$$b_1 \triangleq a_1,$$
$$b_2 \triangleq -a_2a_3\zeta_3\exp(-a_3\zeta_2),$$
$$b_3 \triangleq a_2\exp(-a_3\zeta_2), \tag{5.90}$$
$$b_4 \triangleq \frac{a_4}{\sqrt{1 - a_5\zeta_5^2}},$$
$$b_5 \triangleq \frac{a_4a_5\zeta_4\zeta_5}{\sqrt{(1 - a_5\zeta_5)^3}},$$

получим

$$\Delta y = b_1\Delta\zeta_1 + b_2\Delta\zeta_2 + b_3\Delta\zeta_3 + b_4\Delta\zeta_4 + b_5\Delta\zeta_5 = \sum_i b_i\Delta\zeta_i. \tag{5.91}$$

Очевидно, $b_1, b_2, \ldots, b_5$ могут быть идентифицированы методом линейной регрессии, как и в разд. 5.1. Замечая, что

$$b_5 = b_4a_5\zeta_4\zeta_5, \tag{5.92}$$

можно определить a_5, поскольку ζ_4 и ζ_5 доступны для измерения. Подставляя выражение для a_5 в формулу (5.90) для b_4, получаем a_4. Член a_1 непосредственно определяется величиной b_1 согласно соответствующему равенству (5.90). Члены a_2, a_3 можно

найти из выражений (5.90) для b_2, b_3 следующим образом. Значение a_3 находят из выражения

$$b_2 = -a_3 \zeta_3 b_3, \tag{5.93}$$

где переменная ζ_3 доступна для измерения. Наконец, a_2 определяется подстановкой a_3 в выражение (5.90) для b_3.

По аналогии с описанной выше методикой идентификации процесса (5.86) может быть идентифицировано много других видов нелинейных зависимостей.

Процессы, задаваемые экспоненциальными выражениями вида

$$y = ae^{bx}, \tag{5.94}$$

могут быть идентифицированы с помощью регрессии, если преобразовать их путем логарифмирования к соотношению вида

$$\lg y = \lg a + bx. \tag{5.95}$$

Обозначая $\lg y \triangleq Y$, $x \triangleq X$, $\lg a \triangleq A$, получим

$$Y = A + bX, \tag{5.96}$$

где A и b легко вычисляются методом линейной регрессии.

Аналогично в процессах вида

$$y = ax^b \tag{5.97}$$

можно использовать логарифмирование, получая выражение

$$\lg y = \lg a + b \lg x, \tag{5.98}$$

из которого a и b получаются так же, как в уравнении (5.96). Однако в некоторых случаях последний метод непригоден или для его применения необходима некоторая дополнительная информация. Например, этот метод непригоден для системы

$$y = a_0 + a_1 \lg (a_2 + x), \tag{5.99}$$

в которой требуется идентифицировать a_0, a_1, a_2. Используя метод малых возмущений, получим

$$\Delta y = \frac{a_1}{a_2 + x} \Delta x = b \Delta x. \tag{5.100}$$

Здесь коэффициент b может быть идентифицирован с помощью линейной регрессии,

$$b = \frac{a_1}{a_2 + x}, \tag{5.101}$$

однако это не дает решения для a_0, a_1, a_2. Можно, конечно, использовать вторые и высшие частные производные (или возмущения второго и последующих порядков), но на практике это обычно не имеет смысла, поскольку здесь значимость производных мала, особенно если измерения зашумлены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cramer H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951. [Русский перевод: Крамер Н. Математические методы статистики. — М.: ИЛ, 1948.]
2. Kalman R. E., Design of Self-Optimizing Control Systems, *Trans. ASME*, 80, pp. 468—478 (1958).
3. Kerr R. B., Surber W. H., Jr., Precision of Impulse Response Identification Based on Short Normal Operating Records, *IRE Trans.*, **AC-6**, pp. 173—182 (1961).
4. Elkind J. I., Green D. M., Starr T. A., Application of Multiple Regression Analysis to Identification of Time-Varying Linear Dynamic Systems, *IEEE Trans.*, **AC-8**, pp. 163—166 (1963).
5. Eykhoff P., Process Parameter and State Estimation, Survey Paper, Proc. IFAC 3rd Congress, London, 1966.
6. Clarke D. W., Generalized Least Squares Estimation of the Parameters of a Dynamic Model, Paper 3.17, Proc. IFAC Symp. on Identification, Prague, 1967.
7. Graupe D., Swanick B. H., Cassir G. R., Application of Regression Analysis to Reduction of Multivariable Control Problems and to Process Identification, Proc. National Electronics Conf., Vol. 23, pp. 20—25, Chicago, 1967.
8. Kleinman D. L., Suboptimal Design of Linear Regulator Systems Subject to Storage Limitations, Electronic Systems Lab. Rept. 297, MIT, Cambridge, Mass., 1967.
9. Athans M., The Matrix Maximum Principle, *Inf. and Cont.*, **11**, pp. 592—606 (1968).
10. Bobrovsky B. Z., M. Sc. Thesis, Dept. of Mech. Eng., Technion, Israel Inst. of Technology, Haifa, 1970.
11. Wilts C. H., Principles of Feedback Control, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960 (Chapter 11).
12. Box G. E. P., Jenkins G. M., Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco, 1970. [Русский перевод: Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. — М.: Мир, 1974.]
13. Box G. E. P., Jenkins G. M., Bacon D. W., Models for Forecasting Seasonal and Non-Seasonal Time Series, Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series (edited by B. Harris), pp. 271—311, Wiley, New York, 1967.
14. Sokolnikoff I. S., Redheffer R. M., Mathematics of Physics and Engineering, McGraw-Hill, New York, 1966.
15. Scheid F. Numerical Analysis, Schaum, New York, 1968 (Chapter 21).
16. Forsythe G. E., Generation and Use of Orthogonal Polynomials for Data Fitting with a Digital Computer, *Jour. Soc. Indst. Appl. Math.*, 5, No. 2, pp. 74—88 (1952).
17. Mackinney J. G., Algorithms 28/29, *Comm. A. C. M.*, 3, No. 11 (1960).

Задачи

1. Вычислите коэффициенты a_1, a_2, a_3 уравнения линейной регрессии $y=a_1x_1+a_2x_2+b_3x_3$ при следующем заданном множестве измерений:

x_1	0,62	0,40	0,42	0,82	0,66	0,72	0,38	0,52	0,45	0,69	0,55	0,36
x_2	12,0	14,2	14,6	12,1	10,8	8,2	13,0	10,5	8,8	17,0	14,4	12,8
x_3	5,2	6,1	0,32	8,3	5,1	7,9	4,2	8,0	3,9	5,5	3,8	6,2
y	51,6	49,9	48,5	50,6	49,7	48,8	42,6	45,9	37,8	64,8	53,4	45,3

2. Идентифицируйте дискретную систему первого порядка $y(k+1)=ay(k)+bu(k)$, используя линейную регрессию, на основе следующих данных о входе и выходе:

k	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
u	0,	0,	1,	1,	1,	1,	0,	0,	1,	1,	1,
y	−5,	−4,	−4,	−2,	−2,	−2,	0,	1,	1,	0,	2,
k	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,	21,
u	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	0,	1,	0,
y	2,	2,	2,	3,	3,	3,	3,	2,	1,	1,	2,
k	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30,	31,	32,
u	1,	1,	1,	0,	0,	0,	1,	0,	1,	1,	0,
y	1,	2,	2,	1,	1,	2,	2,	2,	2,	1,	0,
k	33,	34,	35,	36,	37,	38,	39,	40,	41,	42,	43,
u	1,	0,	0,	1,	0,	1,	1,	1,	0,	0,	0,
y	2,	1,	0,	1,	3,	3,	3,	3,	1,	0,	0,
k	44,	45,	46,	47,	48,	4 ,	50,	51,	52,	53,	54,
u	0,	0,	1,	0,	1,	1,	0,	0,	1,	0,	1,
y	−1,	−1,	−1,	−3,	−3,	−3,	−3,	−3,	−4,	−4,	−5,
k	55,	56,	57,	58,	59,	60,	61,	62,	63,	64,	65,
u	0,	0,	0,	1,	1,	0,	1,	0,	0,	0,	0,
y	−6,	−7,	−6,	−4,	−4,	−5,	−5,	−5,	−5,	−4,	−4,
k	66,	67,	68,	69,	70,	71,	72,	73,	74,	75,	76,
u	1,	1,	1,	1,	1,	0,	1,	1,	0,	1,	0,
y	−2,	−2,	−1,	0,	0,	0,	2,	2,	2,	1,	2,
k	77,	78,	79,	80,	81,	82,	83,	84,	85,	86,	87,
u	0,	0,	0,	1,	1,	1,	1,	0,	1,	1,	0,
y	2,	2,	3,	2,	3,	3,	2,	2,	1,	2,	2,
k	88,	89,	90,	91,	92,	93,	94,	95,	96,	97,	98,
u	1,	0,	0,	1,	0,	1,	0,	0,	0,	0,	1,
y	2,	0,	0,	2,	2,	2,	3,	3,	3,	4,	4,

k	99,	100,	101,	102,	103,	104,	105,	106
u	0,	1,	1,	1,	1,	1,	0,	1
y	4,	2,	2,	1,	1,	1,	0,	1

3. Идентифицируйте матрицы параметров

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

системы $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}$ с помощью регрессии по следующим множествам измерений:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	1,00	0,99	0,97	0,96	0,95	0,945	0,94	0,935
x_2	0	—0,10	—0,19	—0,23	—0,28	—0,25	—0,22	—0,18
u	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75

t	8	9	10	11	12	13	14
x_1	0,93	0,925	0,92	0,925	0,93	0,94	0,95
x_2	—0,14	—0,07	0	0,09	0,17	0,26	0,36
u	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50

t	15	16	17	18	19	20	21
x_1	0,97	0,99	1,02	1,05	1,10	1,15	1,22
x_2	0,45	0,55	0,65	0,76	0,86	0,96	1,05
u	4,75	5,00	5,25	5,50	5,75	6,00	6,25

t	22	23	24	25	26	27	28
x_1	1,28	1,32	1,36	1,44	1,52	1,58	1,66
x_2	1,13	1,21	1,30	1,38	1,45	1,51	1,57
u	6,50	6,75	7,00	7,25	7,50	7,75	8,00

t	29	30	31	32	33	34	35
x_1	1,74	1,83	1,92	2,02	2,10	2,18	2,27
x_2	1,63	1,69	1,74	1,78	1,82	1,86	1,89
u	8,25	8,50	8,75	9,00	9,25	9,50	9,75

t	36	37	38	39	40	41	42
x_1	2,37	2,47	2,57	2,66	2,76	2,86	2,97
x_2	1,91	1,93	1,95	1,97	1,98	2,02	2,05
u	10,00	10,25	10,50	10,75	11,00	11,25	11,50

4. Образуйте $y=5\sin x$, $\forall\, 0\leqslant x\leqslant\pi$ и идентифицируйте с помощью нелинейной регрессии, описанной в разд. 5.6.1, параметры a_i полиномиальной аппроксимации

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$$

для аппроксимации y в заданном диапазоне.

5. Найдите полином Чебышева второго порядка для аппроксимации $y=|x|$, $\forall|x|<1$, используя $n=5$.

6. Докажите, что полиномы Чебышева удовлетворяют свойству ортогональности уравнения (5.73).

7. Примените уравнение (5.74) для образования $T_\nu(\xi)$ при $\nu=7, 8, 9, 10$.

8. Докажите, что b_k из уравнения (5.76) минимизирует S из уравнения (5.75).

9. Докажите свойство ортогональности уравнения (5.79), принимая во внимание уравнение (5.78).

10. Предполагая справедливость уравнений (5.78) и (5.79), докажите, что определяемые методом наименьших квадратов коэффициенты аппроксимирующих полиномов Чебышева описываются уравнениями (5.81).

11. Примените регрессионный анализ для идентификации параметра $y=ae^{bx}+c$ по следующим данным:

x	1,84	1,92	2,0	2,08	2,16	2,24	2,32	2,4	2,48
y	61,7	62,5	63,0	63,6	64,5	65,0	65,4	66,4	67,1
x	2,56	2,64	2,72	2,8	2,88	2,96	3,04	3,12	3,2
y	68,0	68,7	69,4	70,2	70,2	71,1	71,9	72,8	73,6
x	3,28	3,36	3,44	3,52	3,6	3,68	3,76	3,84	3,92
y	74,5	76,4	77,2	78,1	79,2	80,3	81,2	82,2	83,3
x	4,0	4,08	4,16	4,24	4,32	4,4	4,48	4,56	4,64
y	84,4	85,4	86,5	87,8	89,1	90,1	91,3	92,5	93,8
x	4,72	4,8	4,88	4,96					
y	95,1	96,4	97,8	98,7					

6

Последовательные регрессионные методы

Методы идентификации, основанные на последовательном методе наименьших квадратов, применимы к линейным и нелинейным стационарным системам и могут быть использованы вместо непоследовательных регрессионных методов из гл. 5. То, что эти методы являются последовательными, позволяет реализовать их сравнительно быстро при небольшом объеме требуемой памяти ЦВМ. При последовательном подходе уменьшаются вычислительные *сложности, связанные с обращением матриц,* что устраняет основное препятствие на пути применения многомерных регрессионных методов (типа описанных в гл. 5) к реальным системам.

При применении регрессионных методов гл. 5 к задачам идентификации медленно меняющихся нестационарных процессов предполагалось наличие стационарности только на интервале, в течение которого собираются данные для регрессионной идентификации. При этом регрессионный интервал состоит из r интервалов измерения. Идентификация в этом случае осуществляется практически непрерывно, а конец фиксированного интервала регрессии периодически продвигается вперед на один или несколько измерительных интервалов. Для каждого такого сдвига заново осуществляется идентификация всего вектора параметров, тогда как данные, не относящиеся к используемому интервалу регрессии, полностью игнорируются. В отличие от непоследовательной регрессии интервал, на котором собираются данные для последовательной регрессии, с течением времени постепенно удлиняется, и никакие данные не считаются настолько старыми, чтобы ими можно было полностью пренебречь.

Следовательно, матрицы последовательной регрессии (и стохастической аппроксимации, обсуждаемые в гл. 7) применимы лишь к процессам, которые можно считать стационарными. Однако, поскольку последовательные регрессионные оценки сходятся к непоследовательным регрессионным оценкам после m итераций (m, как и в гл. 5, — размерность вектора параметров), стационарность должна предполагаться, как и в непоследовательном случае, лишь на m интервалах (см. разд. 5.3).

На практике последовательные оценки любого рода можно применять к данным, полученным на конечном интервале, в пределах которого система предполагается стационарной, следующим образом. Рассматривается интервал T с момента времени $t-T$ до t, на котором взяты n точек в моменты 0, 1, ..., k, ..., n. Можно осуществить последовательную регрессионную идентификацию на основании k выборок, затем в соответствии с $k+1$, $k+2$ и т. д. вплоть до n выборок, дающих конечную оценку в момент времени t. Затем в момент времени $t+\Delta t$ ($\Delta t \triangleq T/n$) повторяют всю процедуру получения регрессионной оценки, так что данные в момент времени $t-T+\Delta t$ становятся первой выборкой и т. д., пока не получат n выборок за период времени $t+\Delta t$, что дает конечную оценку в момент $t+\Delta t$. Та же самая процедура может повторяться для $t+2\Delta t$, $t+3\Delta t$, ..., $t+j\Delta t$, ... Решение о начале новой идентификации по методу последовательной регрессии может быть принято на основании поведения показателя качества идентификации S [уравнение (5.11)], если отсутствует нестационарность. Можно также определить априорно неизвестный порядок векторов состояния или авторегрессионную модель динамики скользящего среднего, как в разд. 5.4.1.

6.1. Скалярный случай

Рассмотрим систему с неизвестным параметром вида

$$x_k = au_k + n_k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.1}$$

где u_k и x_k — измеряемые входная и выходная последовательности соответственно, а n_k — шум измерения на k-м измерительном интервале. Задача идентификации (оценивание неизвестного параметра системы a) может быть решена путем использования линейной регрессии по методу наименьших квадратов. В итоге на основании r единовременных совокупностей величин u_k, x_k ($k=1, \ldots, r$) получается оценка $\hat{a}_r$ параметра a, для которой минимизируется критерий J_r:

$$J_r = \sum_{k=1}^{r} q_k (x_k - \hat{a}_r u_k)^2, \tag{6.2}$$

где q_k — произвольный весовой коэффициент, например $q_k=1$. Введение $q_k>1$ в уравнение (6.2) может служить для увеличения веса последних измерений. Регрессионная оценка по методу наименьших квадратов $\hat{a}_r$ параметра a задается выражением

$$\frac{\partial J_r}{\partial \hat{a}_r} = 0 = -2 \sum_{k=1}^{r} q_k u_k (x_k - \hat{a}_r u_k), \tag{6.3}$$

откуда

$$\hat{a}_r = \frac{\sum_{k=1}^{r} q_k u_k x_k}{\sum_{k=1}^{r} q_k u_k^2}. \tag{6.4}$$

Оценка $\hat{a}_r$ может быть получена и последовательным способом, причем результат будет совпадать с уравнением (6.4) после r измерений [1]:

$$\hat{a}_1 = \frac{q_1 u_1 x_1}{q_1 u_1^2} \tag{6.5}$$

и

$$\hat{a}_2 = \frac{q_1 u_1 x_1 + q_2 u_2 x_2}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2}. \tag{6.6}$$

Однако уравнение (6.6) может быть переписано в виде

$$\hat{a}_2 = \hat{a}_1 - \frac{\hat{a}_1 q_1 u_1^2 + \hat{a}_1 q_2 u_2^2}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} + \frac{q_1 u_1 x_1 + q_2 u_2 x_2}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} =$$

$$= \hat{a}_1 + \frac{q_1 u_1 (x_1 - \hat{a}_1 u_1) + q_2 u_2 (x_2 - \hat{a}_1 u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2}. \tag{6.7}$$

Подстановка выражения (6.5) во второй член правой части уравнения (6.7) дает

$$\hat{a}_2 = \hat{a}_1 + \frac{q_1 u_1 \left(x_1 - \frac{q_1 u_1 x_1}{q_1 u_1^2} u_1\right) + q_2 u_2 \left(x_2 - \frac{q_1 u_1 x_1}{q_1 u_1^2} u_2\right)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} =$$

$$= \hat{a}_1 + \frac{0 + q_2 u_2 (x_2 - \hat{a}_1 u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2} = \hat{a}_1 + \frac{q_2 u_2 (x_2 - \hat{a}_1 u_2)}{q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2}. \tag{6.8}$$

Аналогично получим

$$\hat{a}_j = \hat{a}_{j-1} + p_j q_j u_j (x_j - \hat{a}_{j-1} u_j), \tag{6.9}$$

где

$$\hat{a}_0 = 0. \tag{6.10}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p_1} = q_1 u_1^2, \tag{6.11}$$

$$\frac{1}{p_2} = q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2 = \frac{1}{p_1} + q_2 u_2^2, \tag{6.12}$$

$$\frac{1}{p_j} = \sum_{k=1}^{j} q_k u_k^2 = \frac{1}{p_{j-1}} + q_j u_j^2, \quad \forall j > 1. \tag{6.13}$$

Отметим, что последовательный результат уравнений (6.9) и (6.13) совпадает с уравнением (6.4) для любых значений r.

6.2. Многомерный случай

Рассмотрим систему со многими параметрами, задаваемую уравнением

$$x_k = a_1 u_{1,k} + a_2 u_{2,k} + \cdots + a_m u_{m,k} + n_k, \tag{6.14}$$

где a_i $(i=1, \ldots, m)$ — требующие идентификации неизвестные параметры, x_k — выход системы на k-м измерительном интервале, $u_{i,k}$ — i-й вход системы на этом же интервале, а n_k — шум измерения.

Уравнение (6.14) может быть записано в векторной форме

$$x_k = \mathbf{a}^T \mathbf{u}_k + n_k, \tag{6.15}$$

где

$$\mathbf{a}^T \triangleq [a_1, \ldots, a_m], \tag{6.16}$$

$$\mathbf{u}_k \triangleq [u_{1,k}, \ldots, u_{m,k}]^T. \tag{6.17}$$

Оценивание вектора параметров $\mathbf{a}$ осуществляется таким образом, чтобы оценка $\hat{\mathbf{a}}_r$ минимизировала критерий J_r, записанный по аналогии с уравнением (6.2):

$$J_r = \sum_{k=1}^{r} q_k (x_k - \hat{\mathbf{a}}_r^T \mathbf{u}_k)^2. \tag{6.18}$$

Здесь r обозначает число измерений. Следовательно, оценка $\hat{\mathbf{a}}_r$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial J_r}{\partial \hat{\mathbf{a}}_r} = 0, \tag{6.19}$$

так что

$$\left(\sum_{k=1}^{r} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\right) \hat{\mathbf{a}}_r = \sum_{k=1}^{r} q_k x_k \mathbf{u}_k. \tag{6.20}$$

Введем обозначение

$$\mathbf{P}_r^{-1} \triangleq \sum_{k=1}^{r} q_k \left(\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\right). \tag{6.21}$$

Матрица $\mathbf{P}_r^{-1}$ обратима только при $r \geqslant m$, где m — размерность $\mathbf{u}$, а r — число рассматриваемых измерений. При этом уравнение (6.20) принимает вид

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r = \sum_{k=1}^{r} q_k x_k \mathbf{u}_k, \tag{6.22}$$

откуда

$$\hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{P}_r \sum_{k=1}^{r} q_k x_k \mathbf{u}_k. \tag{6.23}$$

Последнее выражение представляет собой обыкновенную оценку вектора $\mathbf{a}$ с помощью линейной регрессии, которая совпадает с регрессионной оценкой из разд. 5.1. Отметим, что хотя произведение $\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T$ является вырожденным, матрица $\mathbf{P}_r^{-1}$ из (6.21) не вырождена из-за суммирования по k. Уравнение (6.22) может быть записано в виде

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r = \sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k \mathbf{u}_k + q_r x_r \mathbf{u}_r. \tag{6.24}$$

Поскольку из уравнения (6.20) следует

$$\sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k \mathbf{u}_k = \left(\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1}, \tag{6.25}$$

можно подставить выражение для $\sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k \mathbf{u}_k$ из уравнения (6.25) в уравнение (6.24), что дает

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r = \left(\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r x_r \mathbf{u}_r. \tag{6.26}$$

Прибавляя и вычитая $[q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}]$ в правой части уравнения (6.26), получаем

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r = \left(\sum_{k=1}^{r-1} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r \mathbf{u}_r \left(x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1}\right) +$$

$$+ q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1} = \left(\sum_{k=1}^{r} q_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right) \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r \mathbf{u}_r \left(x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1} \right). \quad (6.27)$$

С учетом определения $\mathbf{P}_r^{-1}$ по уравнению (6.21) уравнение (6.27) принимает вид

$$\mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{P}_r^{-1} \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + q_r \mathbf{u}_r \left(x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1} \right), \quad (6.28)$$

что дает

$$\hat{\mathbf{a}}_r = \hat{\mathbf{a}}_{r-1} + \mathbf{P}_r q_r \mathbf{u}_r \left(x_r - \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{a}}_{r-1} \right). \quad (6.29)$$

Следовательно, оценка $\hat{\mathbf{a}}_r$ может быть рекуррентно получена по предыдущей оценке $\hat{\mathbf{a}}_{r-1}$ и по измерениям и весовым коэффициентам x_r, $\mathbf{u}_r$, q_r при условии, что матрица $\mathbf{P}_r$ также получена последовательно. Далее в соответствии с (6.21) получаем уравнение

$$\mathbf{P}_r^{-1} = \sum_{k=1}^{r-1} q_k \left(\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right) + q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T = \mathbf{P}_{r-1}^{-1} + q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T, \quad (6.30)$$

аналогичное скалярному уравнению (6.13).

Выражение для $\mathbf{P}_r^{-1}$ (6.30) требует обратимости матрицы $\mathbf{P}_r$. Должно быть также известно начальное значение матрицы $\mathbf{P}_0$. Однако для упрощения рекуррентного вычисления $\mathbf{P}_r$ можно воспользоваться *леммой об обращении матриц* [2].

Для этого введем сначала

$$\mathbf{H}_r \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{q_r}\, \mathbf{u}_r, \quad (6.31а)$$

так что

$$\mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T = q_r \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^T. \quad (6.31б)$$

Умножая обе части уравнения (6.30) на $\mathbf{P}_r$ слева, получаем

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}_r \mathbf{P}_{r-1}^{-1} + \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T. \quad (6.32)$$

Далее, умножение уравнения (6.32) на $\mathbf{P}_{r-1}$ справа дает

$$\mathbf{P}_{r-1} = \mathbf{P}_r + \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1}. \quad (6.33)$$

Если умножить это уравнение на $\mathbf{H}_r$ справа, то получим

$$\mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r + \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \left(1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r \right). \quad (6.34)$$

Умножение уравнения (6.34) на $[(1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r)^{-1} \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1}]$ справа (заметим, что $[1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r]$ — скаляр) дает

$$\mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r \left(1 + \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} \mathbf{H}_r \right)^{-1} \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1} = \mathbf{P}_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}_r^T \mathbf{P}_{r-1}. \quad (6.35)$$

Подставляя $[\mathbf{P}_r\mathbf{H}_r\mathbf{H}_r^T\mathbf{P}_{r-1}]$ из уравнения (6.33), получим

$$\mathbf{P}_{r-1}\mathbf{H}_r\left(1+\mathbf{H}_r^T\mathbf{P}_{r-1}\mathbf{H}_r\right)^{-1}\mathbf{H}_r^T\mathbf{P}_{r-1}=\mathbf{P}_{r-1}-\mathbf{P}_r, \tag{6.36}$$

$$\mathbf{P}_r=\mathbf{P}_{r-1}-\mathbf{P}_{r-1}\mathbf{H}_r\left(1+\mathbf{H}_r^T\mathbf{P}_{r-1}\mathbf{H}_r\right)^{-1}\mathbf{H}_r^T\mathbf{P}_{r-1}. \tag{6.37}$$

Поскольку $1+\mathbf{H}_r^T\mathbf{P}_{r-1}\mathbf{H}_r$ — скаляр, при получении $\mathbf{P}_r$ по рекуррентному соотношению (6.37) обращения матриц не требуется.

Начальная оценка $\mathbf{P}$ может быть произвольной [3]. Однако для улучшения сходимости целесообразно использовать начальную оценку по Ли [4] следующим образом. Рассматривая совместно уравнения (6.21) и (6.30), получим

$$\mathbf{P}_n^{-1}=\mathbf{P}_0^{-1}+\sum_{k=1}^{n}q_k\left(\mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^T\right). \tag{6.38}$$

Замечая эквивалентность уравнений (6.20) и (5.15) и принимая во внимание, что регрессионная процедура, основанная на уравнении (6.20), должна приводить к той же самой (и потому ограниченной) оценке вектора $\mathbf{a}$ по методу наименьших квадратов, что и процедура, основанная на уравнении (5.15), потребуем

$$\mathbf{P}_0^{-1}=\mathbf{0}. \tag{6.39}$$

Подставляя уравнение (6.39) в (6.30), находим, что оцененное значение $\mathbf{a}_n$, которое было получено с помощью уравнения (6.29) при $r=m$ (m — размерность $\mathbf{a}$), совпадает с оценкой по методу наименьших квадратов, основанной на уравнении (5.15), для

$$\hat{\mathbf{a}}_0=\mathbf{0}. \tag{6.40}$$

Следовательно, начальная оценка

$$\mathbf{P}_0=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{I}, \quad \varepsilon\to 0, \tag{6.41}$$

вместе с начальной оценкой параметров (6.40) приводит к оценке, которая сходится за n шагов в смысле наименьших квадратов (а именно к непоследовательной регрессионной оценке).

Множитель $1/\varepsilon$ можно выбирать почти произвольно в промежутке между 10 и значением, соответствующим наибольшему числу, которое может храниться в памяти используемой ЦВМ. Решение задачи 6.1 показывает, что такой выбор в общем слабо влияет на $\hat{\mathbf{a}}_i$ или $\mathbf{P}_i$ для всех i, кроме $i=1$. Следует, однако, отметить, что величина $1/\varepsilon$ не должна превышать соответствующей величины для наивысшего значащего десятичного разряда используемой вычислительной машины. В противном случае ε превращается в машинный 0, что может приводить к нулевым или исчезающе малым значениям $\mathbf{P}_i$, не позволяя производить

вычисления $\hat{\mathbf{a}}_i$ по уравнению (6.29); это иллюстрируется следующим примером.

Пример 6.1

Рассмотрим систему $y=\mathbf{a}^T\mathbf{x}$, где $\mathbf{a}$ — вектор параметров, который необходимо идентифицировать, и где

$$x_1=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}, \quad x_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad y_1=11, \quad y_2=4.$$

Пусть

$$\mathbf{P}_0=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{I}=10^5\mathbf{I}, \quad \varepsilon=10^{-5}.$$

Следовательно, в соответствии с уравнением (6.37)

$$\mathbf{P}_1=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{I}-\frac{\frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix}16 & 12\\ 12 & 9\end{bmatrix}}{\varepsilon+25}=$$

$$=4\cdot10^3\begin{bmatrix}9+1\cdot10^{-5} & -12\\ -12 & 16+10^{-5}\end{bmatrix}=4\cdot10^3\begin{bmatrix}9+\varepsilon & -12\\ -12 & 16+\varepsilon\end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1=4\cdot10^3\begin{bmatrix}9+\varepsilon & -12\\ -12 & 16+\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}11=4\cdot10^3\begin{bmatrix}4\varepsilon\\3\varepsilon\end{bmatrix}11=\begin{bmatrix}1{,}76\\1{,}32\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2=4\cdot10^3\begin{bmatrix}9+\varepsilon & -12\\ -12 & 16+\varepsilon\end{bmatrix}-\frac{16\cdot10^6\begin{bmatrix}9+\varepsilon & -12\\ -12 & 16+\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9+\varepsilon & -12\\ -12 & 16+\varepsilon\end{bmatrix}}{1+4\cdot10^3\,[1\ \ 2]\begin{bmatrix}9+\varepsilon & -12\\ -12 & 16+\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}=$$

$$=4\cdot10^3\begin{bmatrix}9+\varepsilon & -12\\ -12 & 16+\varepsilon\end{bmatrix}-\frac{16\cdot10^6\begin{bmatrix}(225-30\varepsilon+\varepsilon^2), & (-300-10\varepsilon-2\varepsilon^2)\\ -300-10\varepsilon+2\varepsilon^2), & (400+80\varepsilon+4\varepsilon^2)\end{bmatrix}}{1+4\cdot10^3\,(25+5\varepsilon)}=$$

$$=\frac{16\cdot10^6\begin{bmatrix}(9+\varepsilon)\,25\varepsilon, & -300\varepsilon\\ -300\varepsilon, & (16+\varepsilon)\,25\varepsilon\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(9+\varepsilon)\,(25+3\varepsilon), & -12\,(25+3\varepsilon)\\ -12\,(25+3\varepsilon), & (16+\varepsilon)\,(25+3\varepsilon)\end{bmatrix}}{4\cdot10^3\,(25+5\varepsilon)}-$$

$$-\frac{\begin{bmatrix}(225-30\varepsilon+\varepsilon^2), & (-300-10\varepsilon+2\varepsilon^2)\\ (-300-10\varepsilon+2\varepsilon^2), & (400+80\varepsilon+4\varepsilon^2)\end{bmatrix}}{4\cdot10^3\,(25+5\varepsilon)}\cong$$

$$\cong\frac{4\cdot10^3}{25}\begin{bmatrix}((9+\varepsilon)\,100\varepsilon+92\varepsilon+2\varepsilon^2), & (-300\varepsilon-26\varepsilon-2\varepsilon^2)\\ (-300\varepsilon-26\varepsilon-2\varepsilon^2), & ((16+\varepsilon)\,25\varepsilon-7\varepsilon-\varepsilon^2)\end{bmatrix}.$$

Пренебрегая членами, содержащими ε^2, получаем

$$\mathbf{P}_2\cong\begin{bmatrix}0{,}507 & -0{,}522\\ -0{,}522 & 0{,}629\end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_2=\begin{bmatrix}1{,}913\\1{,}055\end{bmatrix}.$$

С помощью непоследовательной регрессии по двум приведенным выше наборам измерений получим $\hat{\mathbf{a}}_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, что соответствует истинному значению $\mathbf{a}$, поскольку эти измерения не были зашумлены. Видно, что если пренебречь величиной ε в знаменателе $\varepsilon+25$ выражения для $\mathbf{P}_1$, то $\mathbf{P}_2$ становится нулевой матрицей и получить оценку $\hat{\mathbf{a}}$ по уравнению (6.29) оказывается невозможным. Кроме того, рекуррентное вычисление $\hat{\mathbf{a}}_i$ показывает, что величиной ε нельзя пренебрегать, так как в противном случае $\hat{\mathbf{a}}_1$ также будет нулевым вектором.

6.3. Последовательная нелинейная регрессия

В гл. 5 уже упоминалось, что в соответствии с теоремой Вейерштрасса [5] любая непрерывная нелинейная функция $f[x(t)]$ аргумента x может быть аппроксимирована полиномом x, который сходится к $f[x(t)]$. Кроме того, в разд. 5.6 было показано, как идентифицируются по методу наименьших квадратов параметры полинома x, задаваемого (для случая системы третьего порядка с двумя входами) в виде

$$x(t) = a_1 f(u_1) + a_2 f^2(u_1) + a_3 f^3(u_1) + b_1 f(u_2) + b_2 f^2(u_2) + b_3 f^3(u_2), \tag{6.42}$$

чтобы получить

$$x(t) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \ldots + \alpha_6 z_6 = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{z}, \tag{6.43}$$

где

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{6.44а}$$

и

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} f(u_1) \\ f^2(u_1) \\ f^3(u_1) \\ f(u_2) \\ f^2(u_2) \\ f^3(u_2) \end{bmatrix}. \tag{6.44б}$$

Таким образом, идентификация вектора $\boldsymbol{\alpha}$ сводится к задаче идентифицирования параметров α уравнения линейной регрессии (6.43). Последняя идентификация может быть проведена последовательно с помощью процедуры из разд. 6.2. В результате получаются последовательные оценки параметров нелинейных систем, соответствующие минимальной среднеквадратической

ошибке. Последовательную регрессию можно аналогично применить, исходя из удобства проведения анализа, к рассмотренному в разд. 7.3 обобщенному представлению динамических систем с неизвестными нелинейностями.

В последовательной нелинейной регрессии не используются процедуры обращения матриц, но они встречаются при идентификации с помощью нелинейной регрессии. При этом приходится преодолевать сложности, связанные с плохой обусловленностью матриц нелинейных систем. В этом случае матрицы, которые необходимо обращать, имеют более высокую размерность, чем для эквивалентных линейных систем. Например, для процессов с двумя входными воздействиями (6.42), аппроксимированных полиномами третьего порядка, приходится рассматривать шестимерный входной вектор. В этом случае при использовании непоследовательной регрессии потребовалось бы обращение матрицы размерностью 6×6 в отличие от матрицы размерностью 2×2 в линейном случае, что иллюстрирует эффективность последовательной регрессии даже для нелинейных систем небольшой размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fu K. S., Hass V. B., Kashyap R. L., Koivo A. J., Saridis G. N., Wozny M. J., Modern Automatic Control, Vol. 2, Text of short lecture course offered by the School of Electrical Engineering, Purdue University (part of Summer School Lectures at Technion, Haifa, 1969).
2. Sage A. P., Optimal Systems Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., p. 276, 1968.
3. Albert A. E., Gardner L. A., Stochastic Approximation and Nonlinear Regression, MIT Press, Cambridge, Mass., 1967. [Русский перевод: Алберт А., Гарднер Л. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1977.]
4. Lee R. C. K., Optimal Estimation, Identification and Control, MIT Press, Cambridge, Mass., 1964. [Русский перевод: Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. — М.: Наука, 1966.]
5. Sokolnikoff I. S., Redheffer R. M., Mathematics of Physics and Engineering, McGraw-Hill, New York, 1966.

Задачи

1. Вычислите вектор параметров $\mathbf{a}=[a_1\ a_2]^T$ системы $y=\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ с помощью последовательной регрессии для трех различных значений $1/\varepsilon$, два из которых меньше наибольшей длины слова в ЦВМ, а одно больше (например, $1/\varepsilon=10^4$, 10^8, 10^{20} при максимальной длине слова ЦВМ 15 десятичных разрядов). Для идентификации рассмотрите следующие данные измерений величин y, x_1, x_2 ($E+0{,}2$ обозначает умножение на 10^{+2} и т. п.)

y	x_1	x_2
3.78897E+00	3.35934E-01	1.33018E+00
-4.67471E+00	3.78897E+00	-8.00442E-01
9.17902E-02	-4.67471E+00	-9.04345E-01
-5.12105E+00	9.17902E-02	-1.68866E+00
3.81774E+00	-5.12105E+00	2.48370E-01
-9.24301E-02	3.81774E+00	7.32738E-01
2.79226E+00	-9.24301E-02	9.12268E-01
-2.68106E+00	2.79226E+00	-3.35233E-01
6.97041E-01	-2.68106E+00	-3.03864E-01
5.71532E+00	6.97041E-01	2.04451E+00
-4.32101E+00	5.71532E+00	-2.97272E-01
5.00455E+00	-4.32101E+00	8.03982E-01
-7.16561E+00	5.00455E+00	-1.38763E+00
2.02171E+00	-7.16561E+00	-7.59219E-01
-7.22613E-01	2.02171E+00	1.63471E-01
2.27832E+00	-7.22613E-01	6.14916E-01
-6.38333E+00	2.27832E+00	-1.67211E+00
5.44011E+00	-6.38333E+00	5.36703E-01
-3.17230E+00	5.44011E+00	3.05881E-02
1.63904E+00	-3.17230E+00	-8.81123E-02
1.84241E+00	1.63904E+00	9.41946E-01
6.30425E+00	1.84241E+00	2.46990E+00
-5.93066E+00	6.30425E+00	-7.16038E-01
8.13250E-01	-5.93066E+00	-9.15049E-01
5.99851E-01	8.13250E-01	3.62600E-01
3.25144E+00	5.99851E-01	1.20378E+00
4.09460E+00	3.25144E+00	2.01516E+00
-1.16127E+00	4.09460E+00	4.31830E-01
5.52459E-01	-1.16127E+00	-4.81013E-02
-2.40794E-01	5.52459E-01	3.02272E-02
-3.04074E+00	-2.40794E-01	-1.06174E+00

2. Вычислите $\hat{\mathbf{a}}$ методами последовательной и непоследовательной регрессии для наборов измерений

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 9, \quad y_4 = -2$$

системы $$y = \mathbf{a}^T\mathbf{x}.$$

3. Примените нелинейную регрессию для идентификации параметров a_i нелинейной системы $y = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$, используя данные к задаче 4 в гл. 5.

7

Идентификация методами стохастической аппроксимации и последовательного обучения

7.1. Использование метода стохастической аппроксимации для идентификации

Метод стохастической аппроксимации, используемый для идентификации линейных и нелинейных стационарных процессов, по существу представляет собой метод последовательного градиентного поиска. Сходимость метода обеспечивается, если удовлетворяются весьма слабые и общие условия, которые могут быть основаны на теореме Дворецкого [1]. В процедурах идентификации по методу стохастической аппроксимации не предполагается сходимость в среднеквадратическом смысле на каждом шаге оценки после первых m оценок, где m — размерность вектора параметров, как при использовании методов последовательной регрессии, рассмотренных в гл. 6, и поэтому сходимость достигается на большем интервале времени. Однако последовательная структура методов стохастической аппроксимации, которые упоминались выше, делает их более привлекательными и целесообразными для реализации и вычислений. Градиентные методы поиска, используемые в алгоритмах идентификации по методу стохастической аппроксимации, можно рассматривать как развитие классического метода Ньютона для вычисления корней уравнения. Эти методы были успешно применены Роббинсом и Монро [2] и Кифером и Вольфовицем [3] в условиях сходимости, основанных на теореме Дворецкого. Применение метода стохастической аппроксимации в задаче идентификации было впервые рассмотрено в работе Блюма [4] и затем обсуждалось различными авторами [5—8]. Методы, рассмотренные в данной главе, могут использоваться в моделях прогнозирования (гл. 12) вместо метода последовательной регрессии, однако они обычно отличаются более низкой сходимостью.

7.1.1. Процедура идентификации по методу стохастической аппроксимации

Рассмотрим дискретную стационарную систему

$$x_k = \Phi(u_k, u_{k-1}, \ldots, \mathbf{p}), \tag{7.1}$$

которая является нелинейным обобщением уравнения (5.47), и уравнение

$$y_k = x_k + v_k, \tag{7.2}$$

где x, u, y, v — переменные состояния, входа, выхода и шума в измерениях соответственно; $\mathbf{p}$ — вектор параметров, который необходимо идентифицировать; Φ — заданная линейная или нелинейная функция $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ и неизвестного вектора $\mathbf{p}$, где

$$\mathbf{u}_k = (u_k, \ldots, u_{k-r})^T. \tag{7.3}$$

Подставляя соотношение (7.3) в (7.1), преобразуем уравнение (7.1) к виду

$$x_k = \Phi(\mathbf{u}_k, \mathbf{p}). \tag{7.4}$$

Оценка $\hat{\mathbf{p}}_n$ вектора $\mathbf{p}$ (на n-м последовательном шаге) получается из алгоритма стохастической аппроксимации следующим образом:

$$\hat{\mathbf{p}}_{n+1} = \hat{\mathbf{p}}_n - \rho_n \boldsymbol{\psi}_n, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7.5}$$

где $\boldsymbol{\psi}_n$ — функция, которую можно оценить по измерениям y [ее математическое ожидание равно нулю при точных $\mathbf{p}$, $\mathbf{u}$ из уравнений (7.1) и (7.3)], а ρ_n — последовательность скалярных корректирующих коэффициентов.

Для обеспечения сходимости последовательность ρ_n должна удовлетворять следующим условиям, основанным на теореме Дворецкого [1, 6]:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0, \tag{7.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho_k = \infty, \tag{7.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2 < \infty. \tag{7.8}$$

Очевидно, любая функция вида $\rho_k = \rho_1/k$ удовлетворяет уравнениям (7.6)—(7.8) так же, как и многие другие функции k.

Вектор-функция $\boldsymbol{\psi}_k$, учитываемая уравнением (7.5), была введена Кифером и Вольфовицем [3] для описания функции градиента. Поэтому функцию $\boldsymbol{\psi}_k$ можно выразить следующим образом.

Обозначим через $J_k(\hat{\mathbf{p}})$ скалярный показатель качества идентификации, определяемый в виде

$$J_k(\hat{\mathbf{p}}) \triangleq \frac{1}{2}(y_k - \Phi(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k))^2, \tag{7.9}$$

и

$$\boldsymbol{\psi}_k \triangleq \frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{p}})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_k} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J_k}{\partial \hat{p}_{1,k}} \\ \dfrac{\partial J_k}{\partial \hat{p}_{2,k}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial J_k}{\partial \hat{p}_{m,k}} \end{bmatrix}, \tag{7.10}$$

где $\hat{p}_{1,k}, \hat{p}_{2,k}, \ldots, \hat{p}_{m,k}$ — элементы $\hat{\mathbf{p}}_k$. В соответствии с приложением 2 имеем

$$\boldsymbol{\psi}_k = \frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{p}})}{\partial \hat{\mathbf{p}}_k} = [\Phi(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k) - y_k] \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{p}}_k} =$$

$$= [\Phi(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k) - y_k]\, \mathbf{g}_k(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k), \tag{7.11}$$

где

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{p}}_k} = \mathbf{g}_k(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k). \tag{7.12}$$

Заметим, что функцию $\boldsymbol{\psi}_k$ можно оценить по измерениям y_k, $\mathbf{u}_k$ и по предыдущим оценкам $\hat{\mathbf{p}}$.

Процедура идентификации, описываемая уравнением (7.5), таким образом, зависит от начальных оценок $\hat{\mathbf{p}}_1$ (здесь $\mathbf{p}_1$ обозначает начальное множество $\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_q$) и от начального значения коэффициента ρ_1. Процесс оценивания $\boldsymbol{\psi}_k$ можно проиллюстрировать, рассматривая пример линейной системы, описываемой уравнением

$$x_k = \mathbf{p}^T \mathbf{u}_k = \Phi(\mathbf{u}_k, \mathbf{p}). \tag{7.13}$$

Поэтому на основании приложения 2 получим

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{p}}_k} \tag{7.14}$$

и

$$\boldsymbol{\psi}_k = [\Phi(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k) - y_k]\, \mathbf{g}(\mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{p}}_k) = (\hat{\mathbf{p}}_k^T \mathbf{u}_k - y_k)\, \mathbf{u}_k. \tag{7.15}$$

В том случае, когда требуется идентифицировать уравнения состояния или передаточные функции, порядок которых неизвестен, определение порядка можно произвести с помощью методов, рассмотренных в разд. 5.4.

7.1.2. Начальные оценки для алгоритма идентификации

Для начала процедуры идентификации, рассмотренной в разд. 7.1.1, можно принять, что $\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{y}_1$ (где $\mathbf{y}_1$ обозначает первые m измерений) и что $\hat{\mathbf{p}}_1$ можно получить с помощью начальной оценки, как в процедуре последовательного обучения из разд. 7.2, которая основана на использовании уравнения (7.29) при

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{0}. \tag{7.16}$$

Следовательно, если система уравнений (7.1) линейна, то оценка $\hat{\mathbf{p}}_2$ равна

$$\Delta\hat{\mathbf{p}}_2 = \hat{\mathbf{p}}_2 - \hat{\mathbf{p}}_1 = \hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{y_{m+1} - \hat{y}_{m+1}}{\hat{\boldsymbol{\mu}}_1^T \hat{\boldsymbol{\mu}}_1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \tag{7.17}$$

где оценка $\hat{y}_{m+1}$ равна нулю при отсутствии другой априорной информации.

Если в уравнении (7.1) $\boldsymbol{\Phi}$ является нелинейной функцией, то последнее уравнение часто можно представить в линейной форме. Это можно показать на примере нелинейной системы, описываемой уравнением

$$x_{k+1} = p_1 x_k^2 + 2p_2 u_k^3.$$

Обозначая здесь

$$\boldsymbol{\mu}_k \triangleq \begin{bmatrix} (x_k)^2 \\ (u_k)^3 \end{bmatrix},$$

получим линейную систему, которую и следует рассматривать для последовательного получения начальных оценок.

Уравнение (7.17) удовлетворяет уравнению (7.5), если начальное значение коэффициента ρ_1 определяется выражением [8]

$$\rho_1 = \frac{1}{\| \mathbf{g}_1(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \hat{\mathbf{p}}_1) \|} = \frac{1}{\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_1} \tag{7.18}$$

и не требуется дополнительный алгоритм в процедуре, если принято это значение ρ. Заметим, что благодаря свойствам сходи-

мости метода стохастической аппроксимации допустимы также другие начальные оценки.

Пример 7.1

Рассмотрим задачу идентификации вектора параметров $\mathbf{p}$ системы $\omega=\mathbf{p}^T\mathbf{u}+\mu$, где μ — шум измерений и

$$\omega_1 = 11{,}3,\ \omega_2 = 3{,}9,\ \omega_3 = 3{,}11,$$

$$\mathbf{u}_1 = [4,\ 3]^T,\ \mathbf{u}_2 = [1,\ 2]^T,\ \mathbf{u}_3 = [2,\ -1]^T.$$

Так как $\psi_k=(\hat{\mathbf{p}}_k^T\mathbf{u}_k-\omega_k)\mathbf{u}_k$, в соответствии с уравнением (7.7) получим

$$\hat{\mathbf{p}}_{k+1} = \hat{\mathbf{p}}_k - \rho_k\psi_k = \hat{\mathbf{p}}_k - \rho_k\left(\hat{\mathbf{p}}_k^T\mathbf{u}_k - \omega_k\right)\mathbf{u}_k.$$

Подставляя

$$\rho_1 = \frac{1}{\mathbf{g}_1^T\mathbf{g}_1}$$

и учитывая, что

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{g}_k,$$

получим

$$\rho_1 = \frac{1}{25}.$$

Начиная с $\hat{\mathbf{p}}_1=0$ и предполагая $\hat{\omega}_1=0$, последовательно получаем

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{\omega_1 - \hat{\omega}_1}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \frac{11{,}3}{25}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}8\\1{,}35\end{bmatrix},$$

$$\rho_i = \rho_1/i,\quad i = 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$\hat{\mathbf{p}}_3 = \hat{\mathbf{p}}_2 - \frac{\rho_1}{2}\left(\hat{\mathbf{p}}_2^T\mathbf{u}_2 - \omega_2^T\right)\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1{,}8\\1{,}35\end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{50}\left([1{,}8,\ 1{,}35]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 3{,}9\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}8\\1{,}35\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0{,}012\\0{,}024\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}788\\1{,}326\end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{p}}_4 = \hat{\mathbf{p}}_3 - \frac{\rho_1}{3}\left(\hat{\mathbf{p}}_3^T\mathbf{u}_3 - \omega_3\right)\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1{,}788\\1{,}326\end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{75}(-0{,}85)\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}788\\1{,}326\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0{,}026\\-0{,}013\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}814\\1{,}313\end{bmatrix},$$

а истинный вектор $\mathbf{p}$ есть

$$\mathbf{p} = [2,\ 1]^T.$$

7.2. Идентификация методом обучения

В работах [9, 10] предложен метод последовательной идентификации линейных систем в реальном масштабе времени, который основан на принципе обучения с моделью и в котором получена модель импульсной характеристики. Аналогично методам стохастической аппроксимации метод последовательного обучения не дает оценки параметров по методу наименьших квадратов на различных последовательных шагах, вследствие чего сходимость этого метода несколько ниже, чем метода последовательной регрессии. Тем не менее оценки постепенно сходятся (в среднем) к истинным значениям параметров. Метод последовательного обучения отличается от метода стохастической аппроксимации характеристиками сходимости. Этот метод удобно применять для процессов с медленно меняющимися параметрами. Основное преимущество метода последовательного обучения по сравнению с другими последовательными методами состоит в простоте алгоритма последовательной идентификации[1]. Поэтому начальная оценка в методе последовательного обучения может быть использована в качестве начальной оценки для других последовательных процедур идентификации, например основанных на методе стохастической аппроксимации из разд. 7.1 и методе квазилинеаризации из гл. 8.

В случаях нестационарных систем может оказаться необходимым вводить специальный шум в процесс идентификации, который не является возмущением и поэтому приложим в реальном времени. Заметим здесь, что данный метод характеризуется более быстрой сходимостью, чем метод стохастической аппроксимации, и значительно эффективнее и проще методов, рассмотренных в гл. 7.

Аналогично методам регрессии и стохастической аппроксимации в методе последовательного обучения может использоваться подпрограмма для определения порядка вектора состояния передаточной функции, как это рассматривалось в разд. 5.3 и 5.4.

7.2.1. Идентификация стационарных процессов

7.2.1а. Базовый алгоритм идентификации. В методе последовательного обучения [9, 10] рассматривается система со слу-

[1] Можно показать, что метод последовательного обучения сходится [11] при идентификации неустойчивых систем как детерминированных, так и стохастических (под стохастическими понимаются системы, в которых во входе и, возможно, выходе содержится шум). Такую сходимость нельзя обеспечить с помощью метода, рассмотренного в разд. 7.1. Можно показать, что сходимость достигается в регрессионных алгоритмах, использующих метод наименьших квадратов.

чайным входом $u(t)$, выходом $x(t)$ и импульсной реакцией $g(t)$. Эти функции удовлетворяют интегралу свертки [уравнение (4.2)], который для нулевых начальных условий записывается в виде

$$x(t) = \int_0^t g(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau, \tag{7.19}$$

где u — измеряемая функция. Дискретная форма выражения

$$x_j = \sum_{i=1}^{N} g_i u_{j-i} \tag{7.20}$$

аналогична уравнению для скользящих средних бесконечного порядка (при стохастической функции u). Определение g_i, которое является целью идентификации, выполняется путем итерационных вычислений множества величин

$$\hat{h}_1^{(j)},\ \hat{h}_2^{(j)},\ \ldots,\ \hat{h}_N^{(j)},\ \forall j = N+1,\ N+2,\ \ldots, \tag{7.21}$$

которые должны соответственно приближаться к g_1, g_2,..., g_N в уравнении (7.20), где j обозначает номер итерации. Тогда оценка выхода $\hat{x}_j$ при использовании $\hat{h}_i^{(j)}$ (на j-й итерации), таким образом, становится равной по аналогии с уравнением (7.20)

$$\hat{x}_j = \sum_{i=1}^{N} \hat{h}_i^{(j)} u_{j-1}. \tag{7.22}$$

Обозначая

$$\mathbf{g} \stackrel{\Delta}{=} [g_1 \ \ldots \ g_N]^T, \tag{7.23}$$

$$\hat{\mathbf{h}}_j \stackrel{\Delta}{=} [\hat{h}_1^{(j)} \ \ldots \ \hat{h}_N^{(j)}]^T \tag{7.24}$$

и

$$\mathbf{u}_j \stackrel{\Delta}{=} [u_{j-1} \ \ldots \ u_{j-N}]^T, \tag{7.25}$$

преобразуем уравнения (7.20) и (7.22) соответственно к виду

$$x_j = \mathbf{g}^T \mathbf{u}_j \tag{7.26}$$

и

$$\hat{x}_j = \hat{\mathbf{h}}_j^T \mathbf{u}_j. \tag{7.27}$$

Рассмотрим теперь вектор $\Delta\hat{\mathbf{h}}_j$:

$$\Delta\hat{\mathbf{h}}_j \stackrel{\Delta}{=} \hat{\mathbf{h}}_{j+1} - \hat{\mathbf{h}}_j, \tag{7.28}$$

который будем использовать для коррекции вектора следующей идентификации $\hat{\mathbf{h}}_{j+1}$ относительно $\hat{\mathbf{h}}_j$ с учетом ошибки $(x_j - \hat{x}_j)$ в оценке x_j.

Полагая [9, 13]

$$\Delta\hat{\mathbf{h}}_j = (x_j - \hat{x}_j)\frac{\mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j^T\mathbf{u}_j}, \tag{7.29}$$

где $j=1, 2, 3,...$, получим выражение

$$\mathbf{u}_j^T\Delta\hat{\mathbf{h}}_j = \frac{(x_j - \hat{x}_j)\mathbf{u}_j^T\mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j^T\mathbf{u}_j} = x_j - \hat{x}_j, \tag{7.30}$$

которое должно удовлетворять уравнениям (7.27) и (7.28), если оценка $\hat{\mathbf{h}}_{j+1}$ равна $\mathbf{g}$. Чтобы начать процедуру оценивания по уравнению (7.29) при $j=1$, можно подставить в это уравнение x_0 вместо x_j.

7.2.1б. Сходимость оцениваемой импульсной реакции к истинной величине. Рассматривая уравнения (7.26) и (7.27), заметим, что

$$\mathbf{u}_j^T\Delta\hat{\mathbf{h}}_j \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{g} - \hat{\mathbf{h}}_j)^T\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j^T(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{h}}_j). \tag{7.31}$$

Следовательно, величина $\Delta\hat{\mathbf{h}}_j$, определяемая уравнением (7.29), может представлять собой коррекцию $\hat{\mathbf{h}}_j$ по отношению к $\mathbf{g}$, так что $\hat{\mathbf{h}}_{j+1}$ приближается к $\mathbf{g}$. По вектору коррекции в уравнении (7.29) на основе измерений x_j, $\mathbf{u}_j$ и предыдущих оценок $\hat{\mathbf{h}}_j$, $\hat{x}_j$ определяется вектор $\hat{\mathbf{h}}_{j+1}$, соответствующий уравнению (7.28). Однако, поскольку $\mathbf{u}_j^T$ — вектор, из уравнения (7.31) нельзя сделать вывод, что $\Delta\hat{\mathbf{h}}_j = \mathbf{g} - \hat{\mathbf{h}}_j$. Поэтому необходимо дополнительно *проверить сходимость* $\hat{\mathbf{h}}_j$ к $\mathbf{g}$.

Доказательство сходимости $\hat{\mathbf{h}}$ представлено в работе [9] и основано на геометрической интерпретации уравнений (7.28) и (7.29), как показано на рис. 7.1.

Для геометрической интерпретации задачи сходимости определим $(N-1)$-мерную гиперплоскость P_{j-1} в N-мерном пространстве так, чтобы P_{j-1} описывала гиперплоскость, *перпендикулярную* $\mathbf{u}_{j-1}$. В соответствии с уравнением (7.27) имеем $\mathbf{u}_{j-1}^T\mathbf{g} = x_{j-1}$, поскольку из уравнения (7.30) следует $\mathbf{u}_{j-1}^T\hat{\mathbf{h}}_j = x_{j-1}$. Точ-

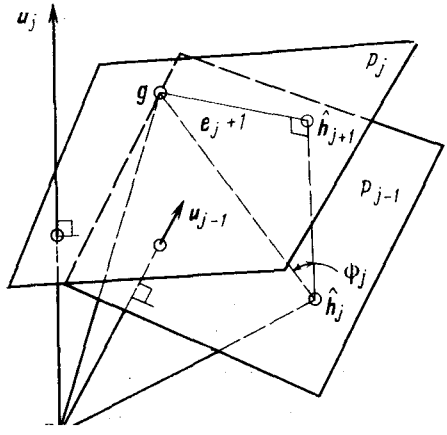


Рис. 7.1. Геометрическая интерпретация сходимости оценки $\hat{h}$.

ки $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}_j$ находятся на P_{j-1}, поскольку скаляр представляет собой произведение величин двух векторов, умноженное на $\cos\theta$, где θ — угол между векторами. Аналогично определим гиперплоскость P_j, которая перпендикулярна $\mathbf{u}_j$. По тем же причинам, что и для плоскости P_{j-1}, точки $\mathbf{g}$, $\hat{\mathbf{h}}_{j+1}$ находятся на P_j. Из уравнения (7.29) следует, что вектор $\mathbf{u}_j$ параллелен вектору $(\hat{\mathbf{h}}_{j+1} - \hat{\mathbf{h}}_j)$ и, следовательно, вектор $(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{h}}_{j+1})$ перпендикулярен вектору $(\hat{\mathbf{h}}_{j+1} - \hat{\mathbf{h}}_j)$. Обозначая угол между векторами $\mathbf{u}_j$ и $(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{h}}_j)$ через ψ_j и вводя обозначение

$$\mathbf{e}_j \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{g} - \mathbf{h}_j, \tag{7.32}$$

получим, что угол между $\mathbf{u}_j$ и $\mathbf{e}_j$ равен ψ_j. Учитывая в соответствии с определением (7.32)

$$\mathbf{e}_{j+1} = \mathbf{g} - \hat{\mathbf{h}}_{j+1}, \tag{7.33}$$

получим, что

$$\frac{\| \mathbf{e}_{j+1} \|^2}{\| \mathbf{e}_j \|^2} = \sin^2 \psi_j = 1 - \cos^2 \psi_j, \tag{7.34}$$

где $\|\mathbf{e}_j^2\|$ обозначает $\mathbf{e}_j^T \mathbf{e}_j$. Из уравнения (7.34) следует

$$\| \mathbf{e}_{j+1} \|^2 = \| \mathbf{e}_{N+1} \|^2 \prod_{r=N+1}^{j} (1 - \cos^2 \psi_r). \tag{7.35}$$

И наконец, так как $\cos\psi_r \leqslant 1 \forall r$, из уравнения (7.35) следует

$$\| \mathbf{e}_j \| \to 0 \text{ при } j \to \infty. \tag{7.36}$$

С учетом того, что $\mathbf{e}_j$ представляет собой ошибку оценивания $\mathbf{g}$ на j-м шаге итерации [см. уравнение (7.32) и рис. 7.1], уравнение (7.36) показывает, что оценка $\hat{\mathbf{h}}_j$ вектора $\mathbf{g}$ в соответствии с уравнением (7.29) сходится к $\mathbf{g}$, что и требуется.

В работе [9] далее показывается, что если в уравнении (7.29) вводится коэффициент коррекции ошибки α:

$$\hat{\mathbf{h}}_{j+1} = \hat{\mathbf{h}}_j + \alpha (x_j - \hat{x}_j) \mathbf{u}_j / \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_j \text{ при } 0 < \alpha < 2, \tag{7.37}$$

то сходимость по-прежнему обеспечивается.

7.2.1в. Определение коэффициента коррекции ошибки. Для определения коэффициента коррекции ошибки α в уравнении (7.37) рассмотрим процесс, описываемый уравнением

$$x_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{g} + n_j. \tag{7.38}$$

Это уравнение аналогично уравнению (7.20), но включает дополнительный член с шумом n_j, где

$$E[n_j] = 0, \tag{7.39}$$

$$E[n_j^2] < \infty, \tag{7.40}$$

а E [...] — символ математического ожидания. Параметры уравнения (7.38) можно идентифицировать в соответствии с уравнением (7.37) для того, чтобы получить оценки $\hat{x}_j$ соответственно уравнению (7.27). Представляя квадрат ошибки идентификации e_{j+1}^2 как

$$e_{j+1}^2 \stackrel{\Delta}{=} \| \hat{\mathbf{h}}_{j+1} - \mathbf{g} \|^2 \tag{7.41}$$

и определяя из уравнения (7.37)

$$\hat{\mathbf{h}}_{j+1} - \mathbf{g} = \left(\mathbf{I} - \alpha \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\| \mathbf{u}_j \|^2} \right) (\hat{\mathbf{h}}_j - \mathbf{g}) + \alpha \frac{n_j \mathbf{u}_j}{\| \mathbf{u}_j \|^2}, \tag{7.42}$$

получим, что математическое ожидание e_{j+1}^2 описывается выражением

$$\overline{e_{j+1}^2} = \| \overline{\left(\mathbf{I} - \alpha \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\| \mathbf{u}_j \|^2} \right) e_j^2} \|^2 + \overline{\left(\frac{\alpha^2 n_j^2}{\| \mathbf{u}_j \|^2} \right)}, \tag{7.43}$$

где символ $\overline{(...)}$ обозначает математическое ожидание (...) в отличие от обозначения математического ожидания E для многочленных выражений.

Обозначая

$$Z_j \triangleq \mathbf{I} - \frac{\alpha \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \tag{7.44}$$

и учитывая $\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_j = \|\mathbf{u}_j\|^2$, получим

$$Z_j^2 = \mathbf{I} - 2\alpha \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\|\mathbf{u}_j\|^2} + \alpha^2 \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\|\mathbf{u}_j\|^4} = \mathbf{I} - \alpha(2-\alpha) \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\|\mathbf{u}_j\|^2}. \tag{7.45}$$

Предполагая здесь и далее в разд. 7.2, что все компоненты вектора $\mathbf{u}_j$ статистически независимы и имеют одинаковое симметрическое распределение, можно записать [9]

$$E\left[\frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\|\mathbf{u}_j\|^2}\right] = \mathbf{I} N^{-1}, \tag{7.46}$$

где N имеет такую же размерность, как и вектор $\mathbf{u}$, который может быть специальным входным воздействием для идентификации. Поэтому из уравнений (7.41) и (7.43) следует

$$\overline{e_{j+1}^2} = \left[1 - \left(\frac{\alpha(2-\alpha)}{N}\right)\right] \overline{e_j^2} + \alpha^2 \left(\frac{\overline{n_j^2}}{\|\mathbf{u}_j\|^2}\right). \tag{7.47}$$

Теперь подставим в уравнение (7.47) выражение

$$\hat{n}_j^* \triangleq \frac{n_j}{\|\mathbf{u}_j\|}. \tag{7.48}$$

Предполагая, что шум n_j и входное воздействие $\mathbf{u}_j$ стационарны, получаем, что $\overline{(n_j^*)^2}$ не зависит от j. Следовательно,

$$\overline{e_{j+1}^2} = \left(1 - \frac{\alpha(2-\alpha)}{N}\right) \overline{e_j^2} + \alpha^2 \overline{(n^*)^2}, \tag{7.49}$$

и в пределе имеем

$$\mathbf{L} \triangleq \lim_{j \to \infty} \overline{e_j^2} = \frac{\alpha N \overline{(n^*)^2}}{2-\alpha} > 0 \text{ при } 0 < \alpha < 2. \tag{7.50}$$

Из уравнения (7.50) следует, что при $\alpha \to 2$ ошибка идентификации стремится к бесконечности. Кроме того, уравнение (7.50) показывает, что небольшая установившаяся ошибка идентификации получается при условии

$$1 \gg \alpha > 0. \tag{7.51}$$

Обращаясь снова к уравнению (7.49), обозначим

$$\gamma_j \triangleq \left(\frac{e_{j+1}^2}{e_j^2}\right) = \left(1 - \frac{\alpha(2-\alpha)}{N}\right) + \alpha^2 \left(\frac{(n^*)^2}{e_j^2}\right). \tag{7.52}$$

Тогда оптимальный коэффициент коррекции α_j^* для минимизации γ_j в уравнении (7.52) должен быть таким, чтобы удовлетворялось [10] условие

$$\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha} = 0 = \frac{-2}{N} + \frac{2\alpha}{N} + 2\alpha\left(\frac{\overline{(n^*)^2}}{e_j^2}\right) \tag{7.53}$$

так, чтобы

$$\alpha_j^* = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\overline{(n^*)^2}}{e_j^2}\right)N} = \frac{\overline{e_j^2}}{\overline{e_j^2} + N\,\overline{(n^*)^2}}. \tag{7.54}$$

Однако, поскольку $\overline{e_j^2}$ в уравнении (7.54) неизвестно, можно только сделать вывод о том, что для быстрой сходимости коэффициент α должен быть меньше 1 [10]. Отметим, что в соответствии с уравнением (7.51) коэффициент α должен быть намного меньше 1 для обеспечения малой установившейся ошибки при независимых входных воздействиях [1)].

7.2.2. Идентификация нестационарных процессов

В отличие от рассмотренных в разд. 7.1 методов, с помощью которых идентифицируются только стационарные процессы, последовательный метод данной главы применим также к нестационарным процессам при условии, что скорости изменения параметров в сравнении с шагом итерации относительно малы. Кроме того, переменные параметры можно отслеживать с переменным шагом итерации. Алгоритм идентификации для случаев медленного изменения параметров аналогичен рассмотренному в разд. 7.2.1. Однако вектор импульсных характеристик $\mathbf{g}$ в уравнении (7.26) уже не является стационарным и заменяется на $\mathbf{g}_j$ в тех уравнениях, где этот вектор присутствует.

Предельную точность идентификации нельзя уже больше рассматривать как точность в установившемся состоянии, как это делалось в разд. 7.2.1, и ее необходимо исследовать с учетом свойств $\mathbf{g}_j$, предполагая, что входные воздействия независимы [10].

7.2.2а. Случайные вариации параметров. Обозначим

$$\Delta\mathbf{g}_j \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{g}_{j+1} - \mathbf{g}_j. \tag{7.55}$$

[1)] Рассматриваемый алгоритм сходится без систематической ошибки в случае устойчивой стохастической системы только при условии $\alpha = \alpha_0/k$ [11].

Тогда уравнение (7.37) приводит к выражению, аналогичному (7.42):

$$\hat{\mathbf{h}}_{j+1} - \mathbf{g}_j = \left(\mathbf{I} - \alpha \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\| \mathbf{u}_j \|^2}\right)(\hat{\mathbf{h}}_j - \mathbf{g}_j) + \alpha n_j \frac{\mathbf{u}_j}{\| \mathbf{u}_j \|^2} =$$

$$= \left(\mathbf{I} - \alpha \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\| \mathbf{u}_j \|^2}\right)(\hat{\mathbf{h}}_j - \mathbf{g}_{j-1}) - \left(\mathbf{I} - \alpha \frac{\mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T}{\| \mathbf{u}_j \|^2}\right)\Delta\mathbf{g}_{j-1} +$$

$$+ \alpha n_j \frac{\mathbf{u}_j}{\| \mathbf{u}_j \|^2}. \qquad (7.56)$$

Возводя уравнение (7.56) в квадрат, находя математические ожидания и учитывая уравнение (7.48), получаем для независимых входных воздействий [10]

$$\overline{e_{j+1,j}^2} = C\overline{e_{j,j-1}^2} + \alpha^2 \overline{(n_j^*)^2} + C \| \Delta\mathbf{g}_{j-1} \|^2 -$$

$$- 2C \{D^{j-1} \Delta\mathbf{g}_{j-1}^T (\hat{\mathbf{h}}_1 - \mathbf{g}_0) - \sum_{i=0}^{j-1} D^i \Delta\mathbf{g}_{j-1}^T \Delta\mathbf{g}_{j-i-1}\}, \qquad (7.57)$$

где

$$C \stackrel{\Delta}{=} 1 - \alpha(2 - \alpha)/N, \qquad (7.58а)$$

$$D \stackrel{\Delta}{=} 1 - \alpha/N. \qquad (7.58б)$$

Предполагая, что $\Delta\mathbf{g}_j$ статистически независимы по j и что

$$E[\Delta\mathbf{g}_j] = 0, \quad \forall j, \qquad (7.59)$$

$$E[\| \Delta\mathbf{g}_j \|^2] = \sigma^2, \qquad (7.60)$$

преобразуем уравнение (7.57) к виду

$$\overline{e_{j+1,j}^2} = C\overline{(e_{j,j-1}^2 + \sigma^2)} - \sigma^2 \overline{(n^*)^2}, \qquad (7.61)$$

или в более общей форме

$$\overline{e_{j+1,j}^2} = C^j \overline{e_{1,0}^2} + \sigma^2 \sum_{i=1}^{j} C^i + \alpha^2 \overline{(n^*)^2} \sum_{i=1}^{j-1} C^i =$$

$$= C^j (\overline{e_{1,0}^2} + \sigma^2) + (\sigma^2 + \alpha^2 \overline{(n^*)^2}) \sum_{i=1}^{j-1} C^i. \qquad (7.62)$$

Следовательно, предельная точность $L_1 \stackrel{\Delta}{=} \lim\limits_{j \to \infty} \overline{e_{j+1,j}^2}$ становится равной

$$L_1 \stackrel{\Delta}{=} \frac{\alpha N (n^*)^2}{2 - \alpha} + \frac{CN\sigma^2}{\alpha(2 - \alpha)} = L + \frac{CN\sigma^2}{\alpha(2 - \alpha)}, \qquad (7.63)$$

где L — предельная точность для стационарного случая, как в уравнении (7.50). При достаточно большом N и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ уравнение (7.63) сводится к виду

$$L_1 \cong \frac{\alpha N \overline{(n^*)^2}}{2} + \frac{N}{\alpha} \sigma^2. \tag{7.64}$$

Получив выражение для предельной точности L в случае идентификации нестационарных процессов, попытаемся теперь определить коэффициент коррекции α' с целью минимизации L_1.

Из условия

$$\frac{\partial L_1}{\partial \alpha} = 0 \tag{7.65}$$

и уравнения (7.64) получаем

$$\frac{N \overline{(n^*)^2}}{2} - \frac{N\sigma^2}{(\alpha')^2} = 0 \tag{7.66}$$

и при принятых выше допущениях имеем

$$\alpha' \cong \sqrt{2\sigma^2 / \overline{(n^*)^2}}. \tag{7.67}$$

Соответствующая наилучшая предельная точность теперь будет равна

$$L_{1\,\text{мин}} \cong N \sqrt{2\sigma^2 \overline{(n^*)^2}}. \tag{7.68}$$

7.2.2б. Ступенчатые изменения параметров. Неслучайные изменения компонентов вектора параметров можно аппроксимировать методом ступенчатой аппроксимации. В этом случае рассматриваются только ступенчатые изменения компонентов вектора $\mathbf{g}$. При исследовании влияния таких ступенчатых изменений на процесс идентификации необходимо рассмотреть переходный процесс по ошибке идентификации. В связи с этим рассмотрим ниже этот переходный процесс и число итераций вектора идентификации $\hat{\mathbf{h}}$, которые необходимы для того, чтобы достичь определенной минимальной точности идентификации.

Определим математическое ожидание ошибки идентификации

$$\mathbf{e}_{j+\mu} \stackrel{\Delta}{=} E\left[\hat{\mathbf{h}}_{j+\mu} - \mathbf{g}\right] \tag{7.69}$$

для того, чтобы в соответствии с уравнениями (7.42) и (7.46) получить

$$\mathbf{e}_{j+\mu+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)\mathbf{e}_{j+\mu} = \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^j \mathbf{e}_\mu. \tag{7.70}$$

Тогда предельная ошибка становится равной

$$\mathbf{e} \triangleq \lim_{j\to\infty} \mathbf{e}_{j+\mu} = 0. \tag{7.71}$$

Введем далее β_j для обозначения нормированного квадрата математического ожидания:

$$\beta_{j+\mu+1} \triangleq \frac{\| \mathbf{e}_{j+\mu+1} \|^2}{\| \mathbf{e}_{\mu} \|^2}. \tag{7.72}$$

Тогда в соответствии с уравнением (7.70) имеем

$$\beta_{j+\mu+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)^{2j}. \tag{7.73}$$

Предполагая, что λ обозначает наименьшую величину шага итерации j, удовлетворяющую условию

$$\beta_{j+\mu+1} < \varepsilon_0, \quad 0 < \varepsilon_0 \ll 1, \tag{7.74}$$

из уравнения (7.73), получим

$$\lambda = \frac{\ln(\varepsilon_0)}{2\ln\left(1 - \frac{\alpha}{N}\right)} + 1 \tag{7.75}$$

и для больших значений N, предполагая, что входные воздействия независимы,

$$\lambda \cong -\frac{N \ln(\varepsilon_0)}{2\alpha}. \tag{7.76}$$

Уравнение (7.76), таким образом, устанавливает связь частоты, с которой происходят ступенчатые изменения компонентов вектора $\mathbf{g}$, с α и ε_0. Свойство процедуры идентификации сходиться к ε_0 за конечное число итераций λ таково, что делает эту процедуру применимой для нестационарных процессов.

7.2.2в. Определение коэффициента коррекции ошибки для нестационарных систем. Оптимальную величину коэффициента ошибки α в уравнении (7.37) для нестационарных систем можно получить по аналогии с разд. 7.2.1 следующим образом. Учитывая определение квадрата ошибки идентификации e^2 в уравнении (7.41), обозначим соответствующую величину для нестационарного случая следующим образом:

$$\mathbf{e}^2_{j+1,j} \triangleq \| \hat{\mathbf{h}}_{j+1} - \mathbf{g}_j \|^2. \tag{7.77}$$

Тогда из уравнения (7.56) получим

$$\frac{\overline{e^2_{j+1,j}}}{\overline{e^2_{jj}}} = 1 - \frac{\alpha(2-\alpha)}{N} + \frac{\overline{\alpha^2 n_j^2}}{e^2_{jj} \| \mathbf{u}_j \|^2} \tag{7.78}$$

и

$$\min_{\alpha}\left(\frac{\overline{e_{j+1,j}^2}}{\overline{e_{jj}^2}}\right)\to\alpha^*. \tag{7.79}$$

При этом в случае независимых входных воздействий имеем

$$\alpha^*=\frac{\overline{e_{jj}^2}}{\overline{e_{jj}^2}+N\dfrac{\overline{n_j^2}}{\|\mathbf{u}_j\|^2}}. \tag{7.80}$$

Последний результат аналогичен оптимальному значению α^* для стационарного случая, как в уравнении (7.54). Однако, как и в случае разд. 7.2.1, величины e_{jj}^2 неизвестны и могут быть оценены только приближенно по ошибкам оценивания x_j. В работе [10] предложено оценивать $\overline{e_{jj}^2}$ по $\hat{e}_{jj}^2$, где

$$\hat{e}_{jj}^2\triangleq N\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=j-m+1}^{j}\frac{(x_k-\hat{x}_{jk})^2}{\|\mathbf{u}_k\|^2}-\overline{n_j^2}\right\} \tag{7.81}$$

и

$$\hat{x}_{jk}\triangleq\mathbf{u}_k^T\hat{\mathbf{h}}_j\quad\text{при}\quad k\leqslant j. \tag{7.82}$$

7.2.3. Распространение на случай процессов со многими входами

Выходную переменную линейного процесса x_j на дискретном интервале времени j в случае процесса со многими входными воздействиями можно представить по аналогии с уравнением (7.20) в виде

$$x_j=\sum_{i=1}^{N}\left(g_{1,i}v_{1,j-i}+g_{2,i}v_{2,j-i}+\cdots+g_{\mu,i}v_{\mu,j-i}\right), \tag{7.83}$$

где μ — число входных воздействий. Уравнение (7.83) можно переписать следующим образом:

$$x_j=\mathbf{G}^T\mathbf{V}_j, \tag{7.84}$$

где

$$\mathbf{G}\triangleq[g_{1,1},\ \ldots,\ g_{1,N},\ g_{2,1},\ \ldots,\ g_{2,N},\ \ldots,\ g_{\mu,1},\ \ldots,\ g_{\mu,N}]^T \tag{7.85}$$

и

$$\mathbf{V}_j \triangleq [v_{1,j-1}, \ldots, v_{1,j-N}, v_{2,j-1}, \ldots, v_{2,j-N}, \ldots, v_{\mu,j-1}, \ldots, v_{\mu,j-N}]^T. \tag{7.86}$$

Введем вектор идентификации $\hat{\mathbf{H}}_j$ на j-й итерации

$$\hat{\mathbf{H}}_j = [\hat{h}_{11}, \ldots, \hat{h}_{1N}, \ldots, \hat{h}_{\mu 1}, \ldots, \hat{h}_{\mu N}]_j^T. \tag{7.87}$$

Тогда по аналогии с уравнениями (7.27) и (7.28)

$$\hat{x}_j \triangleq \hat{\mathbf{H}}_j^T \mathbf{V}_j \tag{7.88}$$

и

$$\Delta\hat{\mathbf{H}}_j \triangleq \hat{\mathbf{H}}_{j+1} - \hat{\mathbf{H}}_j. \tag{7.89}$$

Снова по аналогии с уравнением (7.29) допустим, что $\Delta\hat{\mathbf{H}}_j$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta\mathbf{H}_j = (x_j - \hat{x}_j)\frac{\mathbf{V}_j}{\mathbf{V}_j^T\mathbf{V}_j} \tag{7.90}$$

и позволяет получить выражение

$$\mathbf{V}_j^T\,\Delta\hat{\mathbf{H}}_j = \frac{(x_j - \hat{x}_j)\,\mathbf{V}_j^T\mathbf{V}_j}{\mathbf{V}_j^T\mathbf{V}_j}, \tag{7.91}$$

которое удовлетворяет уравнениям (7.88) и (7.89).

Как и в случае процесса с одним входным воздействием [уравнение (7.37)], можно использовать коэффициент коррекции ошибки α, значение которого находится в диапазоне от 0 до 2, причем удовлетворительные характеристики обеспечиваются при α в диапазоне от 0 до 1. Доказательство сходимости, приведенное в разд. 7.2.1б, применимо для случая процесса со многими входными воздействиями даже без допущения об их независимости.

Пример 7.2

Для того чтобы дополнительно проиллюстрировать процедуру идентификации методом последовательного обучения, рассмотрим систему из примера 7.1 и проведем ее идентификацию данным методом. Из уравнения (7.29) получим

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{\omega_1}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \frac{11{,}3}{25}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}8\\1{,}35\end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (7.27) дает

$$\hat{\omega}_2 = \hat{\mathbf{p}}_2^T \mathbf{u}_2 = [1{,}8 \;\; 1{,}35]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 4{,}5$$

и

$$\hat{\mathbf{p}}_3 = \hat{\mathbf{p}}_2 + \frac{(3{,}9-4{,}5)}{5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}8\\1{,}35\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0{,}12\\0{,}24\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}68\\1{,}11\end{bmatrix},$$

$$\hat{\omega}_3 = \hat{\mathbf{p}}_3^T \mathbf{u}_3 = 2{,}25,$$

$$\hat{\mathbf{p}}_4 = \hat{\mathbf{p}}_3 + \frac{(3{,}1-2{,}25)}{5}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}68\\1{,}11\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0{,}32\\-0{,}17\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2{,}0\\0{,}94\end{bmatrix},$$

где истинный вектор $\mathbf{p}$ имеет вид

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},$$

что указывает на более высокую сходимость, чем в случае процедуры идентификации методом стохастической аппроксимации, как в примере 7.1.

7.3. Последовательная процедура распознавания образов для идентификации нелинейных систем

Распространение метода идентификации последовательным обучением из разд. 7.2 на нелинейные процессы было предложено в работе [14]. При этом для классификации типа нелинейности, которая наилучшим образом описывает поведение системы, содержащей априорно заданное число нелинейных функций, используется алгоритм распознавания образов. В настоящем методе используются принципы, которые аналогичны рассмотренным в разд. 7.2.

Для получения алгоритмов идентификации нелинейных процессов сначала запишем выражение для интеграла свертки входа $x(t)$ и выхода $z(t)$ в линейной системе:

$$z(t) = \int_0^t g_1(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau, \tag{7.92}$$

где $g_1(t)$ — импульсная характеристика линейной системы.

Рассмотрим систему с параболической нелинейностью вида

$$y(t) = z^2(t), \tag{7.93}$$

где выходную переменную $y(t)$ нелинейной системы можно рассматривать как произведение $z_1 z_2$ выходов двух линейных сис-

тем $g_1 g_2$, каждая из которых удовлетворяет соотношению (7.92). Поэтому представим $y(t)$ следующим выражением:

$$y(t) = \int_0^t g_1(\tau_1)\, x(t-\tau_1)\, d\tau_1 \int_0^t g_2(\tau_2)\, x(t-\tau_2)\, d\tau_2 =$$
$$= \int_0^t \int_0^t g_1(\tau_1)\, g_2(\tau_2)\, x(t-\tau_1)\, x(t-\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2. \qquad (7.94)$$

Подставляя в него

$$\gamma_2(\tau_1, \tau_2) \stackrel{\Delta}{=} g_1(\tau_1)\, g_2(\tau_2), \qquad (7.95)$$

преобразуем уравнение (7.94) к виду

$$y(t) = \int_0^t \int_0^t \gamma_2(\tau_1, \tau_2)\, x(t-\tau_1)\, x(t-\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2. \qquad (7.96)$$

Рассмотрим далее систему, которая описывается уравнением

$$y(t) = f[z(t)], \qquad (7.97)$$

где $f[z(t)]$ — произвольная непрерывная нелинейная функция $z(t)$. В разд. 5.6 уже было установлено, что в соответствии с теоремой Вейерштрасса любую непрерывную функцию $f[z(t)]$ можно аппроксимировать полиномом $z(t)$, сходящимся к $y(t)$. Поэтому $y(t)$ аппроксимируется функцией $y_m(t)$, где

$$y(t) \cong y_m(t) \stackrel{\Delta}{=} f_m[z(t)], \qquad (7.98)$$

а f_m обозначает последовательность полиномов $x(t)$ порядка m. Определим теперь

$$\gamma_1(\tau) \stackrel{\Delta}{=} g_1(\tau), \qquad (7.99а)$$

$$\gamma_2(\tau_1, \tau_2) \stackrel{\Delta}{=} g_1(\tau_1)\, g_2(\tau_2), \qquad (7.99б)$$

$$\vdots$$

$$\gamma_k(\tau_1 \cdots \tau_k) \stackrel{\Delta}{=} \prod_{j=1}^{k} g_j(\tau_j), \qquad (7.99в)$$

чтобы по аналогии с уравнениями (7.94) и (7.96) получить

$$f_m[z(t)] = a_1 \int_0^t \gamma_1(\tau_1)\, x(t-\tau_1)\, d\tau_1 +$$
$$+ a_2 \int_0^t \int_0^t \gamma_2(\tau_1, \tau_2)\, x(t-\tau_1)\, x(t-\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 +$$
$$+ \cdots$$

$$+ a_m \overbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}^{m \text{ интегралов}} \gamma_m(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)\, x(t-\tau_1)\, x(t-$$

$$-\tau_2)\cdots(x-\tau_m)\, d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_m =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k \overbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}^{k \text{ интегралов}} \gamma_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)\, x(t-\tau_1)\, x(t-$$

$$-\tau_2)\cdots x(t-\tau_k)\, d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k. \qquad (7.100)$$

Уравнение (7.100) можно записать в дискретной форме следующим образом:

$$f_m[z(t)] \cong \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \overbrace{\sum_{\mu_1=1}^{n} \cdots \sum_{\mu_k=1}^{n}}^{k \text{ сумм}} \gamma_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k} x_{\mu_1} \cdot x_{\mu_2} \cdots x_{\mu_k} \right), \qquad (7.101)$$

где x_{μ_k} определяется выражением

$$x_{\mu_k} \triangleq x(t-\mu_k T), \qquad (7.102)$$

а T — период квантования. Очевидно, если рассматриваются нестационарные системы, то $\gamma_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k}$ следует записать как $\gamma_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k}(t)$. Уравнения (7.100) и (7.101) представляют собой ряд Вольтерра m-го порядка для рассматриваемой системы.

7.3.1. Алгоритм последовательного обучения

Пусть

$$\mathbf{x} \triangleq (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \qquad (7.103)$$

где x_i есть $x(t-iT)$. Введем следующий s-мерный вектор $\boldsymbol{\psi}_s(\mathbf{x})$:

$$\boldsymbol{\psi}_s(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}),\ \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_s(\mathbf{x})]^T, \qquad (7.104)$$

где

$$\varphi_1 \triangleq x_1,\ \varphi_2 \triangleq x_2, \ldots, \varphi_n \triangleq x_n,$$

$$\varphi_{n+1} \triangleq x_1^2,\ \varphi_{n+2} \triangleq x_1 x_2, \ldots, \varphi_{2n} \triangleq x_1 x_n, \qquad (7.105)$$

$$\varphi_{2n+1} \triangleq x_2^2,\ \varphi_{2n+2} \triangleq x_2 x_3, \ldots, \varphi_{2n+n-1} \triangleq x_2 x_n.$$

Если в $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ необходимо учесть члены до порядка r включительно, то размерность $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ определяется соотношением

$$s = \binom{n+r}{r} - 1 = \frac{(n+r)!}{n!\, r!} - 1. \qquad (7.106)$$

Определим теперь такую функцию $\Phi(x)$, что

$$\Phi(\mathbf{x}) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i \varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \omega_{jh} x_j x_h + \cdots + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \cdots \sum_{q=1}^{n}}_{r} \underbrace{\omega_{j,h,\ldots,q}}_{r} \underbrace{x_j x_h \cdots x_q}_{r} = \boldsymbol{\omega}^T \cdot \boldsymbol{\psi}_s. \quad (7.107)$$

Здесь $\omega_{j,\ldots}$ — весовые коэффициенты, а $\boldsymbol{\omega}$ обозначает вектор, элементы которого равны $\omega_{j,\ldots}$. Из уравнения (7.107) следует, что $\Phi(\mathbf{x})$ представляет собой взвешенный по суммам полином x_j порядка от 1 до r, каждый из которых имеет свой эквивалент в $\boldsymbol{\psi}_s(\mathbf{x})$.

Алгоритм последовательного распознавания образов предполагает, что выходная переменная $y(t)$ в уравнении (7.94), представляющая собой выход идентифицируемой системы, будет оценена через $\hat{y}_m(t)$. Учитывая уравнения (7.98) и (7.101), можно рассматривать оценку $\hat{y}_m$ выходной переменной y как выходную переменную *линейной модели оценивания, описываемой* уравнением

$$\hat{y}_m(t) = \Phi(\mathbf{x}), \quad (7.108)$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ определяется уравнением (7.107). Вектор параметров $\boldsymbol{\omega}_{i+1}$ на $(i+1)$-й итерации оценивания последовательно получается с помощью алгоритма оценивания, который аналогичен алгоритму, описываемому уравнением (7.37) в разд. 7.2:

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \frac{\alpha(y_i - \hat{y}_i)\,\boldsymbol{\psi}_{s,i}(\mathbf{x})}{\boldsymbol{\psi}_{s,i}^T \boldsymbol{\psi}_{s,i}} \quad \text{при } 0 < \alpha < 2. \quad (7.109)$$

При этом $y_m(t)$ сходится к $\hat{y}_m(t)$ и, следовательно, к $y(t)$ в уравнении (7.94) [12].

Результирующая процедура последовательной идентификации нелинейных систем обладает свойствами, сходными с процедурой для линейных систем, как это уже было описано в разд. 7.2. Следовательно, указанная процедура сходится к параметрам, которые изменяются медленно в сравнении с частотой итерации. Однако, так же как и в разд. 7.2, эта процедура основана на произвольном выборе алгоритмов коррекции ошибки [уравнение (7.109)]. Поэтому оптимизация коэффициента α может дать оценку, которая будет наилучшей только при общей форме уравнения (7.108). Процедура, которая обеспечивает адекватную идентификацию при такой же полиномиальной ап-

проксимации нелинейной системы, может быть также выполнена методом последовательной регрессии, рассмотренным в разд. 6.4. Этот метод применим к нелинейным системам, но несколько более сложен для вычислений, чем данная процедура. В то же время процедура последовательной линейной регрессии несколько сложнее для вычислений, чем процедура последовательного линейного обучения из разд. 7.2.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dvoretzky A., On Stochastic Approximation, Proc. 3rd Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1, University of California Press, 1956.
2. Robbins H., Monro, S., A Stochastic Approximation Method, *Annals of Math., Stat.*, **22** (1951).
3. Kiefer J., Wolfowitz J., Stochastic Estimation of the Maximum of Regression Problems, *Annals of Math. Stat.*, **23** (1952).
4. Blum J. R., Multidimensional Stochastic Approximation Methods, *Annals of Math. Stat.*, **25** (1954).
5. Kushner J. J., A Simple Iterative Procedure for the Identification of Unknown Parameters of a Linear Time Varying Discrete System, Trans. ASME, *Jour. Basic Eng.*, **85** (1963). [Русский перевод: *Труды амер. об-ва инженеров-механиков*, серия Д, 1963, № 2, с. 118.]
6. Kirvaitis K., Fu K. S., Identification of Nonlinear Systems by Stochastic Approximation, Proc. Joint Automatic Control Conf., pp. 255—264, 1966.
7. Kashyap R. L., Blaydon C. C., Fu K. S., Stochastic Approximation in Adaptive, Learning and Pattern Recognition Systems (edited by J. M. Mendel and K. S. Fu), Academic Press, New York, 1970.
8. Blaydon C. C., Kashyap R. L., Fu K. S., Applications of the Stochastic Approximation Methods, in Adaptive, Learning and Pattern Recognition Systems (edited by J. M. Mendel, Fu K. S.), Academic Press, New York, 1970.
9. Nagumo J., Noda A. A Learning Method for System Identification, *IEEE Trans.*, **AC-12**, pp. 282—287 (1967).
10. Noda A., Effects of Noise and Parameter Variation on the Learning Identification Method, *Jour. of SICE of Japan*, pp. 303—312 (1969).
11. Graupe D., Fogel E., A Unified Sequential Identification Structure based on Convergence Considerations, *Automatica*, **12**, No. 1 (Jan. 1976).
12. Fogel E., Graupe D., Convergence of Least Squares Identification Algorithms Applied to Unstable Stochastic Processes (via an L_1 version of Markov's theorem), *Intern. Jour. Sys. Sci.*, **8**, pp. 611—618 (1977).
13. Albert A. E., Gardner L. A. Stochastic Approximation and Nonlinear Regression, MIT Press, Cambridge, Mass., 1967.
14. Roy R., Sherman J., Pattern Recognition in a Learning Automatic Control System, Paper 16, Proc. IFAC Symp. on Identification, Prague, 1967.

Задачи

1. Используйте метод стохастической аппроксимации для идентификации параметров из задачи 1 в гл. 6.

2. Исследуйте влияние коэффициента α в уравнении (7.37) на скорость сходимости при идентификации α по данным из примера 6.1. Примите α=0,5, 1,0, 1,5.

3. Идентифицируйте параметры нелинейной системы из задачи 11 в гл. 5 методом последовательного обучения.

4. Идентифицируйте процесс $y=\mathbf{a}^T(t)\mathbf{x}$, где $\mathbf{a}$ — нестационарный параметр, который изменяется ступенчато, по следующим измерениям:

y	2,05	3,65	1,55	0,8	—2,05	5,9	3,95	2,0
x_1	2	1,7	1,1	0,5	1,5	2,6	1,6	1,3
x_2	—0,5	0,1	—0,3	0,1	—1,0	0,3	0,4	—0,3
y	0,8	1,25	2,85	4,45	—0,75	—0,3	2,35	
x_1	1,0	0,7	1,3	1,6	0,6	0,7	1,1	
x_2	—0,6	—0,1	—0,5	—0,2	—1,1	—0,9	—0,5	
y	4,9	2,25	5,35	5,45	1,55	1,55	—0,1	
x_1	1,4	0,9	1,6	2,1	1,0	0,6	0,1	
x_2	0,2	—0,3	0,3	—0,4	—0,7	—0,1	—0,2	

8

Идентификация методом квазилинеаризации

Метод квазилинеаризации впервые ввели Беллман и Калаба [1, 2] для решения краевых задач в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Применение этого метода для идентификации параметров нелинейных систем было рассмотрено в основном в работах [3—6].

Метод квазилинеаризации по существу представляет собой метод преобразования нелинейной многоточечной краевой задачи, являющейся в основном стационарной, в линейную нестационарную задачу. Этот метод применим как к непрерывным, так и к дискретным процессам. Предполагается, что идентифицируемые параметры постоянны и, так же как и во всех других методах идентификации нелинейных систем, должен быть задан тип нелинейности, по крайней мере в виде аппроксимации. Может быть учтена и нестационарность параметров, если они изменяются медленно в сравнении со скоростью сходимости процедуры идентификации. Сходимость процедуры будет довольно высокой, если имеется близкое начальное приближение к величинам параметров, которые необходимо идентифицировать. Метод по своей сути является итерационным; он не требует введения специальных пробных воздействий и поэтому применим для использования в реальном масштабе времени.

Так как процедуры идентификации методом квазилинеаризации сходятся к истинным значениям параметров только тогда, когда начальные приближения величин параметров оказываются внутри области сходимости, для указанных процедур требуется определенная априорная информация о диапазоне значений параметров; в этом нет необходимости, если используются последовательные подходы, рассмотренные в гл. 6 и 7. Метод квазилинеаризации имеет особое значение в тех случаях, *когда различные переменные состояния системы не могут быть измерены одновременно во все моменты измерений.* В этом случае описание системы в пространстве состояний само по себе является многоточечной задачей, для которой применение метода квазилинеаризации естественно. Метод квазилинеаризации по своей сути является методом идентификации, основанным на фиксиро-

ванном числе измерений, а не на последовательно возрастающем объеме измерений, как в гл. 6, 7. В том случае, когда имеется достаточное число измерений некоторых состояний, а измерения других состояний не проводятся, метод квазилинеаризации может дать оценки этих недостающих состояний и параметров одновременно.

8.1. Идентификация непрерывных систем методом квазилинеаризации

Рассмотрим нелинейную систему, описываемую уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \tag{8.1}$$

в котором $\mathbf{f}$ — нелинейная функция. В уравнении (8.1) j-ю строку можно записать следующим образом:

$$\dot{x}_j = f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \tag{8.2}$$

где $\mathbf{x}$—n-мерный вектор состояния, $\mathbf{u}$—m-мерный вектор входных воздействий, $\mathbf{p}$—r-мерный вектор параметров. Компоненты вектора $\mathbf{p}$ не известны и подлежат идентификации, тогда как векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ измеряются, а вид функций f_j известен для всех j. Система уравнений (8.1) подчинена $(n+r)$ граничным условиям, задаваемым $(n+r)$ измеряемыми (известными) функциями $x_j(t_i)$ для различных состояний x_j в различные моменты времени t_i. Пример такой ситуации дает система

$$\dot{x} = ax^3 + bu(t), \tag{8.3}$$

где a, b — неизвестные параметры, которые необходимо идентифицировать, а x и u — переменные состояния и управления соответственно. Предполагается, что компоненты вектора $\mathbf{p}$ *постоянны*. Поэтому уравнение (8.1) можно дополнить следующим уравнением состояния:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}. \tag{8.4}$$

Объединяя уравнения (8.1) и (8.4), получим

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \tag{8.5}$$

где

$$\mathbf{z} \triangleq [x_1 \cdots x_n, p_1 \cdots p_r]^T. \tag{8.6}$$

Учитывая в разложении в ряд Тейлора только члены первого порядка, получим $(\mu+1)$-ю оценку $\dot{\mathbf{z}}$ из μ-й оценки в виде

$$\hat{\dot{\mathbf{z}}}_{\mu+1} = \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mu+1} = \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mu} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\mu}}{\partial \mathbf{z}} (\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1} - \hat{\mathbf{z}}_{\mu}), \tag{8.7}$$

где

$$\boldsymbol{\psi} \stackrel{\Delta}{=} [\mathbf{f}^T, 0, \ldots, 0]^T. \tag{8.8}$$

Здесь $\mathbf{f}$ имеет такой же смысл, как и в уравнении (8.2), причем *число нулей* равно числу r в уравнении (8.6), и

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu}{\partial \mathbf{z}} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\psi}}}{\partial \mathbf{z}}\Bigg|_{\mathbf{z}=\hat{\mathbf{z}}_\mu}. \tag{8.9}$$

Заметим, что уравнение (8.7) — *линейное* относительно $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}$. Поэтому его можно представить в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{\mu+1}(t) = \hat{\mathbf{A}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t) + \hat{\mathbf{V}}_\mu, \tag{8.10}$$

где

$$\hat{\mathbf{V}}_\mu \stackrel{\Delta}{=} \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu - \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu}{\partial \mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}_\mu = \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}}_\mu, \tag{8.11а}$$

$$\hat{\mathbf{A}} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu}{\partial \mathbf{z}}. \tag{8.11б}$$

Уравнение (8.10) имеет полное решение

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}(t, t_0)\, \hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0) + \hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t), \tag{8.12}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — общее решение уравнения (8.10), определяемое выражениями

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}_{\mu+1}(t, t_0) = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu(t)}{\partial \mathbf{z}}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mu+1}(t, t_0), \tag{8.13}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_\mu(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad \forall \mu, \tag{8.14}$$

а $\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t)$ — частное решение уравнения (8.10), удовлетворяющее уравнению

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{\mu+1}(t) = \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu(\hat{\mathbf{z}}, t) - \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu(t)}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{z}_\mu(t) + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu(t)}{\partial \mathbf{z}} \hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t) \tag{8.15}$$

при условии

$$\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t_0) = \mathbf{0}. \tag{8.16}$$

Вектор начальных условий $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0), \forall \mu$, в уравнении (8.12) получается таким образом, что удовлетворяет многоточечному

граничному условию, заданному $n+r$ величинами или функциями $x_j(t_i)$, которые доступны измерению и которые, как показано ниже, будут $n+r$ измерениями состояний x_j в момент времени t_i. Следовательно, для уравнения (8.12) получаем

$$x_j(t_i) = \hat{\varphi}_{j,\mu+1}(t_i, t_0)\,\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0) + q_{j,\mu+1}(t_i), \qquad (8.17)$$

где $\hat{\varphi}_{j,\mu+1}$ — j-я строка $\hat{\varphi}_{\mu+1}$, а $x_j(t_i)$ — j-я переменная состояния в момент $t=t_i$. Так как $n+r$ граничных условий дают $n+r$ уравнений вида (8.17) для $n+r$ различных $x_j(t_i)$, то имеется $n+r$ линейных уравнений для $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0)$, что позволяет получить $n+r$ компонентов $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0)$. В тех случаях, когда предполагается, что граничные значения зашумлены, может оказаться целесообразным иметь больше чем $n+r$ граничных значений. Следовательно, можно определить $n+r$ компонентов вектора $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t_0)$, применяя линейную регрессию к параметрам уравнения (8.17) для сглаживания влияния шума в последней группе $v>n+r$ граничных значений. Применяемый алгоритм регрессии должен быть последовательным, чтобы исключить операцию обращения матрицы. Из уравнения (8.17) следует, что должна быть принята некоторая начальная оценка $\hat{\mathbf{x}}_0(t_0)$. Эта оценка используется совместно с первоначально принятой оценкой $\hat{\mathbf{p}}$ для того, чтобы получить начальную оценку решения во времени уравнения (8.1) с момента $t=0$ до последнего момента t_i в уравнении (8.17). Это решение во временно́й области подставляется в уравнение (8.12) для получения начальных оценок $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{q}$ в уравнении (8.17). Для получения последующих ($\mu=1, 2,...$) оценок $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{p}$ оценивание $\mathbf{x}$ с момента $t=0$ до последнего момента t_i повторяется в указанном выше порядке. В связи с этим вычислительные затраты на идентификацию методом квазилинеаризации значительны и применение метода ограничивается в основном случаями, когда доступны измерению только некоторые (необязательно одинаковые) состояния в различные моменты времени.

Указанную выше процедуру получения вектора параметров $\mathbf{p}$ методом квазилинеаризации можно дополнительно пояснить, рассматривая следующий пример.

Пример 8.1

Рассмотрим процесс, описываемый уравнением (8.3), которое представлено следующим образом:

$$\dot{x} = ax^3 + bu(t),$$

где u — измеряемая функция, а параметры a, b необходимо идентифицировать. Образуем вектор $\mathbf{z}$ в соответствии с уравнением (8.6):

$$\mathbf{z} \triangleq [x, a, b]^T. \tag{8.18}$$

Оценка $\mathbf{z}$ $(\mu+1)$-го порядка в уравнении (8.3) принимает в соответствии с уравнениями (8.7), (8.8) вид

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{\mu+1} = \hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\mu}{\partial \mathbf{z}} (\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1} - \hat{\mathbf{z}}_\mu) =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{a}\hat{x}^3 + \hat{b}u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\mu + \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2 & \hat{x}^3 & u(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_\mu \begin{bmatrix} \hat{x}_{\mu+1} - \hat{x}_\mu \\ \hat{a}_{\mu+1} - \hat{a}_\mu \\ \hat{b}_{\mu+1} - \hat{b}_\mu \end{bmatrix}.$$

Используя обозначения из уравнений (8.1) и (8.10), получим

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{\mu+1}(t) = \hat{\mathbf{A}}_\mu \hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t) + \hat{\mathbf{V}}_\mu =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2 & \hat{x}^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_\mu \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_{\mu+1} + \begin{bmatrix} \hat{a}\hat{x}^3 + \hat{b}u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2 & \hat{x}^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_\mu \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_\mu.$$

Соответственно из уравнения (8.13) следует

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}_{\mu+1}(t_i, t_0) = \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2(t) & \hat{x}^3(t) & u(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_\mu \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mu+1}(t_i, t_0), \tag{8.19}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_\mu(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad \forall \mu.$$

Вектор начального состояния $\hat{\mathbf{z}}(t_0)$ в уравнении (8.12) получается из априорно заданных граничных значений $x(t_1)$, $x(t_2)$, $x(t_3)$, $x(t_4)$ при помощи уравнения (8.17) следующим образом

(с учетом того, что рассматриваемое число граничных значений больше минимального числа 3, которое требуется для трехмерного вектора **z**):

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \hat{\varphi}_{11,\mu+1}(t_1, t_0)\,\hat{x}_{\mu+1}(t_0) + \hat{\varphi}_{12,\mu+1}(t_1, t_0)\,\hat{a}_{\mu+1} + \\ &\quad + \varphi_{13,\mu+1}(t_1, t_0)\,\hat{b}_{\mu+1} + \hat{\mathbf{q}}_{1,\mu+1}(t_1), \\ x(t_2) &= \hat{\varphi}_{11,\mu+1}(t_2, t_0)\,\hat{x}_{\mu+1}(t_0) + \cdots + \hat{\mathbf{q}}_{1,\mu+1}(t_2), \\ &\vdots \\ x(t_4) &= \hat{\varphi}_{11,\mu+1}(t_4, t_0)\,\hat{x}_{\mu+1}(t_0) + \cdots + \hat{\mathbf{q}}_{1,\mu+1}(t_4). \end{aligned} \tag{8.20}$$

Параметры $\hat{\varphi}_{1j,\mu+1}(t, t_0)$ зависят от производных $\partial\hat{\psi} / \partial z|_{\mu}$ в соответствии с уравнениями (8.13) и (8.19) и, таким образом, не зависят от $\hat{x}_{\mu+1}(t_0)$. Аналогично $\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t_i)$ вычисляется из уравнения (8.15) по $\hat{\psi}_{\mu}$, $\partial\hat{\psi}/\partial z|_{\mu}$, $\hat{z}_{\mu}$ с учетом условия (8.16) и поэтому также не зависит от $x_{\mu+1}(t_0)$. Таким образом, определение $\hat{x}_{\mu+1}(t_0)$, $\hat{a}_{\mu+1}$, $\hat{b}_{\mu+1}$ с помощью регрессии из уравнений (8.20) производится в предположении, что начальные приближения по a, b, $x(t_0)$ имеются. Непосредственное (нерегрессионное) определение последних трех неизвестных из уравнений (8.20) может оказаться возможным только тогда, когда имеются лишь три граничных значения x, а измерения не содержат шума (см. также задачу 1 в этой главе).

8.2. Идентификация дискретных систем методом квазилинеаризации

Процедуры идентификации дискретных систем методом квазилинеаризации могут быть определены непосредственно из соответствующей процедуры идентификации непрерывной системы (см. разд. 8.1).

Рассмотрим дискретную систему, описываемую уравнением

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}], \quad kT = t, \tag{8.21}$$

где k=0, 1, 2,..., v, а **x**, **u**, **p** — n-мерный вектор состояния, m-мерный вектор входа и r-мерный вектор параметров соответственно, как и в уравнении (8.1). Предполагается, что система уравнений (8.21) удовлетворяет $(n+r)$ граничным условиям, которые представляют собой $(n+r)$ скалярных измеряемых функций $x_j(i)$,

где $x_j(i)$ обозначает j-е компоненты $\mathbf{x}$ на i-м интервале. Аналогично случаю непрерывной системы из разд. 8.1 определим $(n+r)$-мерный вектор $\mathbf{z}$ в виде

$$\mathbf{z} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \tag{8.22}$$

где

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}(k). \tag{8.23}$$

Тогда из уравнения (8.21) следует

$$\mathbf{z}(k+1) = \boldsymbol{\lambda}[\mathbf{z}(k), \mathbf{u}(k), k], \tag{8.24}$$

и для стационарных систем имеем

$$\boldsymbol{\lambda} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{p}, k] \\ \mathbf{p}[k] \end{bmatrix}. \tag{8.25}$$

По аналогии с непрерывным случаем применим разложение в ряд Тейлора уравнения (8.24), чтобы получить следующее соотношение между $(\mu+1)$-й оценкой $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}$ вектора $\mathbf{z}$ и соответствующей μ-й оценкой:

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mu}[\hat{\mathbf{z}}_{\mu}(k), \mathbf{u}(k), k] + \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{\mu} [\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k) - \hat{\mathbf{z}}_{\mu}(k)]. \tag{8.26}$$

Уравнение (8.25) можно переписать в виде линейного уравнения для $\mathbf{z}_{\mu+1}$ с переменными коэффициентами:

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k+1) = \hat{\mathbf{B}}(k)\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k) + \hat{\mathbf{w}}(k), \tag{8.27}$$

где

$$\hat{\mathbf{B}}_{\mu}(k) \triangleq \left(\frac{\Delta \hat{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{\mu}, \tag{8.28а}$$

$$\hat{\mathbf{w}}(k) \triangleq \hat{\boldsymbol{\lambda}}[\hat{\mathbf{z}}_{\mu}(k), \mathbf{u}(k), k] - \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial \mathbf{z}}\right)_{\mu} \hat{\mathbf{z}}_{\mu}(k). \tag{8.28б}$$

Решение уравнения (8.26), таким образом, становится полностью аналогичным решению в разд. 8.1:

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(k) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mu+1}(k, h)\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(h) + \hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(k), \tag{8.29}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mu+1}(k, h) = \hat{\mathbf{A}}_{\mu}(k)\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mu+1}(k, h), \quad k > h, \tag{8.30}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(h, h) \triangleq \mathbf{I}, \tag{8.31}$$

а $\hat{\mathbf{q}}(k)$ — частное решение уравнения (8.26) в форме

$$\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(k+1) = \hat{\mathbf{B}}_{\mu}(k)\,\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(k) + \hat{\mathbf{w}}(k) \tag{8.32}$$

с начальным условием

$$\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(0) = \mathbf{0}. \tag{8.33}$$

Здесь $n+r$ компонентов начального вектора $\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(0)$ должны удовлетворять $n+r$ граничным условиям $x_j(i)$. Для того чтобы обеспечить единственность решения, в случае зашумленных измерений необходимо ввести $v>n+r$ граничных условий. Эти условия образуют линейное регрессионное соотношение для получения $n+r$ компонентов вектора $\mathbf{z}_{\mu+1}(0)$, как и в непрерывном случае, рассмотренном в разд. 8.1.

Для выполнения процедуры идентификации необходимо иметь начальные оценки $\hat{\mathbf{p}}_0$ вектора $\mathbf{p}$ и $\hat{\mathbf{x}}(0)$ вектора $\mathbf{x}(0)$. Эти оценки должны быть как можно ближе к реальным значениям, так как сходимость гарантируется не всегда и зависит от начальных оценок. Аналогично непрерывному случаю начальная оценка становится менее значащей, когда число измерений достаточно велико.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R. Dynamic Programming, Princeton University Press, N. J., 1957. [Русский перевод: Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.]
2. Kalaba R., On Nonlinear Differential Equations, The Maximum Operation and Monotone Convergence, *Jour. Math. and Mechanics*, 8, pp. 519—574 (1959).
3. Kumar K. S. P., Shridar R., On the Identification of Control Systems by the Quasi-Linearization Method, *IEEE Trans.*, AC-9, pp. 151—154 (1964).
4. Sage A. P., Eisenberg B. R., Experiments in Nonlinear and Nonstationary System Identification via Quasilinearization and Differential Approximation, Proc. Joint Automatic Control Conf., pp. 522—530, 1965.
5. Sage A. P., Optimal System Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968.
6. Detchmendy D. M., Shridar R., On the Experimental Determination of the Dynamical Characteristics of Physical Systems, Proc. National Electronics Conf., pp. 522—530, Chicago, 1965.

Задачи

1. Используйте метод квазилинеаризации для идентификации стационарного процесса, описываемого уравнением

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t),$$

где

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \forall t > 0, \\ 0, & \forall t < 0, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0{,}095, \quad x(2) = 0{,}181,$$

а начальная оценка для a равна $\hat{a}_1 = -0{,}12$.

2. Идентифицируйте стационарную дискретную систему, заданную уравнением

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k),$$

где

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0{,}095, \quad x(2) = 0{,}181, \quad x(3) = 0{,}259$$

и

$$u(k) = \begin{cases} 1, & \forall k \geqslant 0, \\ 0, & \forall k < 0. \end{cases}$$

Выберите обоснованную начальную оценку в соответствии с указанными выше данными.

3. Идентифицируйте нелинейную систему, определяемую уравнением

$$\dot{x} = ax^2,$$

при $x(0) = 0{,}5$, $x(1) = 0{,}27$ и при начальной оценке $\hat{a}_1 = -4$. Решите эту же задачу при $\hat{a}_1 = -3$ и $\hat{a}_1 = -10$.

9

Идентификация методом инвариантного погружения

Методы, с помощью которых двухточечная краевая задача преобразуется в одноточечную краевую задачу, были впервые предложены в работе [1] и названы методами инвариантного погружения. Их применение к задачам идентификации систем рассмотрено в работах [2—4].

Методы инвариантного погружения можно использовать для идентификации параметров, а также для одновременного последовательного оценивания параметров и состояния линейных и нелинейных наблюдаемых систем. Подобно методам, изложенным в предыдущих главах, для метода инвариантного погружения в задачах идентификации нелинейных систем необходима априорная информация о форме нелинейной функции, параметры которой необходимо идентифицировать. Сходимость процедуры идентификации методом инвариантного погружения к фактическим значениям параметров можно обеспечить в довольно широком диапазоне начальных оценок, однако при этом требуются априорные данные о диапазоне, внутри которого находятся значения параметров. Такие данные могут быть неточными в отличие от случая, когда используются краевые методы квазилинеаризации, но это сильно уменьшает скорость сходимости процедуры идентификации. Кроме того, неадекватный выбор начальной матрицы **Q** при решении задачи идентификации [уравнение (9.29) и последующие] может привести к расходимости или слабой сходимости процедуры идентификации. Это будет показано далее по тексту и в решениях задач в конце главы (см. приложение 4).

Идентификация методом инвариантного погружения основана на интегрировании по времени системы нелинейных дифференциальных уравнений, решение которой должно сходиться к оценкам параметров и переменных состояния. Поскольку измерения входят в правые части указанных уравнений, то чем продолжительнее процесс измерений, тем точнее решение сходится к истинным значениям параметров.

Поскольку метод инвариантного погружения может обеспечить последовательное одновременное оптимальное оценивание

параметров и всех переменных состояния линейных и нелинейных систем, он оказывается одним из наиболее мощных математических методов идентификации. Одновременное оценивание состояния и параметров может выполняться с помощью и других методов, рассмотренных далее в гл. 12, а в некоторых случаях — методом квазилинеаризации из гл. 8. Однако бóльшая часть методов гл. 12 применима в основном к линейным системам и требует линеаризации нелинейных систем, а при использовании метода квазилинеаризации для обеспечения сходимости необходимо иметь хорошие начальные оценки. Метод инвариантного погружения свободен от этих ограничений. Несмотря на свой общий характер, применимость метода инвариантного погружения для идентификации в реальном масштабе времени ограничивается вычислительными сложностями. Поэтому данный метод применим в основном в тех случаях, когда требуется совместная оценка состояния и параметров нелинейных систем и имеется достаточная априорная информация. Отметим, что, когда размерность вектора состояния неизвестна, итерационное определение размерности обычно нерационально из-за увеличения числа определяемых параметров и соответствующего усложнения вычислений.

9.1. Постановка задачи идентификации методом инвариантного погружения

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{p},\ \mathbf{u}(t)] + \mathbf{n}(t) \tag{9.1}$$

и

$$\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{p},\ \mathbf{u}(t)] + \mathbf{v}(t), \tag{9.2}$$

где $\mathbf{f}$ — нелинейная функция, $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{v}$ — векторы состояния, измеряемого входа, неизмеряемого шума в системе, измерений и шума в измерениях соответственно, $\mathbf{p}$ — вектор постоянных параметров, причем

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}. \tag{9.3}$$

Задача идентификации формируется как задача минимизации затрат J, где

$$J \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \{[\mathbf{z} - \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})]^T \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot [\mathbf{z} - \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})] + \hat{\mathbf{n}}^T \boldsymbol{\zeta} \hat{\mathbf{n}}\}\, dt. \tag{9.4}$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{n}}$ — оценки соответственно $\mathbf{x}$ и $\mathbf{n}$ из уравнения (9.1), $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ — положительные диагональные весовые матрицы (отметим,

что в моделях предсказания обычно $\mathbf{u}=0$). Определим теперь вектор $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \tag{9.5}$$

Из уравнений (9.1), (9.3) следует

$$\dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\psi} + \mathbf{V}, \tag{9.6}$$

где

$$\boldsymbol{\psi} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{9.7}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{9.8}$$

а $\boldsymbol{\psi}$ из уравнения (9.7) — нелинейная функция $\mathbf{y}$, даже если функция $\mathbf{f}$ линейна, так что

$$\dot{x} = px + u,$$

где

$$x \triangleq y_1, \quad p \triangleq y_2, \quad \mathbf{y}^T = [y_1, y_2],$$

и в соответствии с уравнением (9.6)

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 y_2 + u \\ \dot{y}_2 &= 0 \end{aligned}\right\} = \boldsymbol{\psi} + \mathbf{V},$$

так что

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Для минимизации J по оценкам $\hat{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ рассмотрим гамильтониан H, где

$$H \triangleq [\mathbf{z} - \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{u})]^T \boldsymbol{\eta} [\mathbf{z} - \boldsymbol{\varphi}] + \hat{\mathbf{n}}^T \boldsymbol{\zeta} \hat{\mathbf{n}} + \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \boldsymbol{\psi}. \tag{9.9}$$

Из условий минимизации J по $\hat{\mathbf{y}}$ получаем следующую систему уравнений [5]:

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{y}}} = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}, \tag{9.10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \dot{\hat{\mathbf{y}}}, \tag{9.11}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \mathbf{0}. \tag{9.12}$$

Кроме того, когда $\hat{\mathbf{y}}(t_0)$, $\hat{\mathbf{y}}(t_f)$ не заданы (здесь t_0, t_f обозначают начальный и конечный моменты времени), условие трансверсальности при минимизации H дает [5]

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}\Big|_{t=t_0}^{t=t_f}. \tag{9.13}$$

Таким образом, с уравнениями (9.10) и (9.11) можно связать следующие граничные условия:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \mathbf{0}, \tag{9.14}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0}. \tag{9.15}$$

Следовательно, оценивание $\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{\mathbf{x}}$ представляет собой задачу решения уравнений (9.10) и (9.11) с использованием соответствующих начальных условий. В этом случае оказывается необходимым применение метода инвариантного погружения.

9.2. Решение задачи идентификации непрерывной системы методом инвариантного погружения

Задачу идентификации и оценивая состояния системы на интервале от t_0 до t_f, определяемой уравнениями (9.10) и (9.11), можно рассматривать как обобщенную двухточечную краевую задачу, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t), \tag{9.16}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t), \tag{9.17}$$

в которых $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ — функции $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{u}$, t, а граничные условия можно выразить следующим образом:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \mathbf{a}, \tag{9.18}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{b}. \tag{9.19}$$

Можно считать, что конечные условия $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$ описываются более общей функцией t_f, где t_f — *текущая переменная*. Тогда из равенства

$$\boldsymbol{\lambda} = (t_f) = \mathbf{C}(t_f) \tag{9.20}$$

следует конечное условие, налагаемое на y:

$$\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f). \tag{9.21}$$

Таким образом, недостающее конечное условие, налагаемое на $\mathbf{y}$, заменяется функцией $\mathbf{F}$ соответствующего конечного условия, налагаемого на $\boldsymbol{\lambda}$.

Разлагая уравнение (9.21) в ряд Тейлора и ограничиваясь членами первого порядка с учетом уравнения (9.16), получим

$$\mathbf{F}(\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C},\ t_f + \Delta t_f) = \mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f) + \mathbf{g}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t_f)\,\Delta t_f. \tag{9.22}$$

Применяя дальнейшую аппроксимацию к $\mathbf{F}(\mathbf{C}+\Delta\mathbf{C},\ t_f+\Delta t_f)$, получим в итоге

$$\mathbf{F}(\mathbf{C}+\Delta\mathbf{C}, t_f+\Delta t_f)=\mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f)+\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{C}}\Delta\mathbf{C}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_f}\Delta t_f, \qquad (9.23)$$

где $\mathbf{C}$, t_f рассматриваются как независимые переменные. Из определения $\mathbf{C}$ и из уравнения (9.17) получим аппроксимацию первого порядка для $\Delta\mathbf{C}$:

$$\Delta\mathbf{C}=\mathbf{h}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t_f)\,\Delta t_f. \qquad (9.24)$$

Подставляя выражение для $\Delta\mathbf{C}$ из уравнения (9.24) в (9.23) и приравнивая правые части уравнений (9.22) и (9.23), получим следующее уравнение инвариантного погружения:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{C}}\right)^T\cdot\mathbf{h}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f)+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_f}=\mathbf{g}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t_f). \qquad (9.25)$$

Однако из сравнения уравнений (9.10), (9.11) с (9.16), (9.17) получаем

$$\mathbf{g}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f)=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\bigg|_{\mathbf{F},\mathbf{C},t_f}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{C}}\bigg|_{\mathbf{F},\mathbf{C},t_f} \qquad (9.26)$$

и

$$\mathbf{h}(\mathbf{F}, \mathbf{C}, t_f)=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}\bigg|_{\mathbf{F},\mathbf{C},t_f}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{F}}\bigg|_{\mathbf{F},\mathbf{C},t_f}. \qquad (9.27)$$

Поэтому уравнение (9.25) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t_f}-\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{C}}\right)^T\frac{\partial H}{\partial \mathbf{F}}\bigg|_{\mathbf{F},\mathbf{C},t_f}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{C}}\bigg|_{\mathbf{F},\mathbf{C},t_f}. \qquad (9.28)$$

Согласно определению $\mathbf{F}$ в уравнении (9.21), можно выбрать решение уравнения (9.28) в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f)=\hat{\mathbf{y}}(t_f)-\mathbf{Q}(t_f)\,\mathbf{C}(t_f), \qquad (9.29)$$

где $\mathbf{Q}$ — симметрическая матрица, аналогичная матрице $\mathbf{P}$ в гл. 6. Последнее предположение является обоснованным в окрестности t_f, так как при малых $\mathbf{C}$ можно допустить линейную связь между функцией $\mathbf{F}(t_f)$ и ее оценкой. Подставляя выражение для $\mathbf{F}$ из уравнения (9.29) в (9.28) и учитывая уравнения (9.20) и (9.21), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{y}(t_f)}{\partial t_f}+\mathbf{Q}(t_f)\frac{\partial H}{\partial \mathbf{F}}\bigg|_{\mathbf{F},\mathbf{C},t_f}=\frac{\partial H}{\partial \mathbf{C}}\bigg|_{\mathbf{F},\mathbf{C},t_f}. \qquad (9.30)$$

Из проведенных выше преобразований следует, что уравнение (9.30) удовлетворяет конечным условиям в момент t_f. Следовательно, если уравнения (9.29) и (9.30) объединить, вводя

переменную t вместо текущей переменной t_f, то, учитывая, что $\mathbf{C}(t_f)$ не зависит от t, получим систему уравнений, удовлетворяющих конечным условиям $\mathbf{C}(t_f)$:

$$\mathbf{y}(\mathbf{C}, t) = \hat{\dot{\mathbf{y}}}(t) - \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{C} \tag{9.31}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial t} - \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t), \tag{9.32}$$

где $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ имеют такой же смысл, как в уравнениях (9.26) и (9.27) при замене $\mathbf{F}$, t_f на $\mathbf{y}$, t. Последнее уравнение можно преобразовать в уравнение

$$\hat{\dot{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{Q}}(t)\,\mathbf{C} - \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, t), \tag{9.33}$$

или, подставляя выражения для $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ из уравнений (9.26), (9.27), в уравнение

$$\hat{\dot{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{C} + \mathbf{Q}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}\Bigg|_{\substack{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{Q}\mathbf{C} \\ \boldsymbol{\lambda}=\mathbf{C},\ \partial H/\partial \mathbf{u}=\mathbf{0}}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\Bigg|_{\substack{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{Q}\mathbf{C} \\ \boldsymbol{\lambda}=\mathbf{C},\ \partial H/\partial \mathbf{u}=\mathbf{0}}}. \tag{9.34}$$

Уравнение (9.34) фактически описывает поведение системы в окрестности значения t_f текущей переменной, обозначаемой теперь через t. Это дает возможность провести последовательное оценивание переменной t_f в диапазоне изменения переменной t. Так как в соответствии с уравнениями (9.15) и (9.20) матрица $\mathbf{C}$ должна быть близка к $\mathbf{0}$, все члены C_i^2, C_iC_j (C_i, C_j — элементы матрицы $\mathbf{C}$) можно опустить. Кроме того, поскольку $\mathbf{C}\to\mathbf{0}$, уравнение (9.34) дает две системы уравнений, а именно систему уравнений, полученную в результате приравнивания $\mathbf{C}$ к $\mathbf{0}$ в уравнении (9.34), и систему уравнений, полученную путем приравнивания коэффициентов при членах первого порядка малости по $\mathbf{C}$ (см. ниже пример). При получении этих уравнений замечаем, что матрица $\mathbf{Q}$ симметрическая. Результирующую систему дифференциальных уравнений первого порядка можно решить последовательно при заданных начальных условиях $\mathbf{y}(t_0)$, $\mathbf{Q}(t_0)$. Благодаря хорошим свойствам сходимости метода инвариантного погружения точность начальной оценки величин $\hat{\mathbf{y}}(t_0)$. $\mathbf{Q}(t_0)$ не имеет решающего значения[1]. Однако при лучших начальных оценках $\hat{\mathbf{y}}(t_0)$ процедура сходится быстрее. Отметим,

[1] Это утверждение является спорным, поскольку известно, что сходимость метода инвариантного погружения обеспечивается при достаточно точных начальных оценках. Это автор утверждает и сам в начале главы. — *Прим. ред.*

что для системы с n состояниями и r неизвестными параметрами число совместных нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых необходимо получить в рассмотренной выше процедуре, равно $[n+r+(n+r)(n+r+1)/2]$, где $(n+r)$ — число элементов $\mathbf{y}$, а $(n+r)(n+r+1)/2$ — число различных элементов в симметрической матрице $\mathbf{Q}$. Большое число уравнений вызывает вычислительные трудности при реализации процедуры идентификации методом инвариантного погружения.

Пример 9.1

Этот пример приводится для того, чтобы проиллюстрировать процедуру идентификации методом инвариантного погружения. Рассмотрим процесс, описываемый уравнениями

$$\dot{x} = p_1 x + p_2 u,$$
$$z = x + v,$$

где p_1, p_2 — неизвестные постоянные параметры, а x, u, v и z обозначают состояние, вход, шум в измерениях и выход соответственно.

Можно записать

$$\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = 0.$$

Введем в рассмотрение

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

и

$$J \triangleq \int_0^{t_f} (z - \hat{x})^2 \, dt.$$

Для минимизации J по $\hat{\mathbf{y}}$ рассмотрим гамильтониан H, определяемый выражением

$$H \triangleq (z - x)^2 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g} = (z - \hat{x})^2 + \lambda_1 (\hat{p}_1 \hat{x} + \hat{p}_2 u) + \lambda_2 \dot{p}_1 + \lambda_3 \dot{p}_2 =$$
$$= (z - \hat{y}_1)^2 + \lambda_1 (\hat{y}_1 \hat{y}_2 + \hat{y}_3 u) + 0 + 0.$$

Получим для него следующие уравнения [5]:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 = \hat{y}_1 \hat{y}_2 + \hat{y}_3 u,$$

где u — измеряемая переменная, и

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{y}_1} = -\dot{\lambda}_1 = -2z + 2\hat{y}_1 + \lambda_1 \hat{y}_2,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{y}_2} = -\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 \hat{y}_1,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{y}_3} = -\dot{\lambda}_3 = \lambda_1 u.$$

Граничными условиями для последних уравнений являются

$$\lambda(0) = \begin{bmatrix} \lambda_1(0) \\ \lambda_2(0) \\ \lambda_3(0) \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda(t_f) = 0.$$

Предположим, что решение уравнения инвариантного погружения (9.28) получается в форме уравнения (9.29):

$$\mathbf{F}(\mathbf{C}, t_f) = \hat{\mathbf{y}}(t_f) - \mathbf{Q}(t_f)\,\mathbf{C}.$$

Подставляя это выражение в (9.28), получим в соответствии с уравнением (9.34):

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} & \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{13} \\ \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{23} \\ \dot{Q}_{13} & \dot{Q}_{23} & \dot{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 2(z - \hat{y}_1 + Q_{11}C_1 + Q_{12}C_2 + Q_{13}C_3) - C_1(\hat{y}_2 - Q_{12}C_1 - Q_{22}C_2 - Q_{23}C_3) \\ -C_1(\hat{y}_1 - Q_{11}C_1 - Q_{12}C_2 - Q_{13}C_3) \\ -C_1 u \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\hat{y}_1 - Q_{11}C_1 - Q_{12}C_2 - Q_{13}C_3)(\hat{y}_2 - Q_{12}C_1 - Q_{22}C_2 - Q_{23}C_3) + \\ \qquad + u(\hat{y}_3 - Q_{13}C_1 - Q_{23}C_2 - Q_{33}C_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Последнее уравнение можно решить путем разложения его в ряд относительно $\mathbf{C}=0$. При этом получаются две системы дифференциальных уравнений для $\dot{\hat{y}}_i$ и $\dot{Q}_j$. Первая из них образуется при подстановке $\mathbf{C}=0$ в последнее выражение, а вторая — в результате приравнивания только членов, умноженных на один и тот же член C_i, $\forall\, i$, при этом все другие члены опускаются. Реальными начальными условиями будут

$x(t_0)=z(t_0)$;

$\hat{\mathbf{p}}(t_0)$ — любое рациональное приближение; чем ближе $\hat{\mathbf{p}}(t_0)$ к истинному $\mathbf{p}$, тем быстрее сходится процедура;

$\mathbf{Q}(t_0)=k\mathbf{I}$; при очень большой величине k может наблюдаться расходимость, а при очень малой величине k сходимость может оказаться очень слабой. Таким образом, величину k можно определить методом проб и ошибок, начиная с малой величины, так как анализ устойчивости системы нелинейных дифференциальных уравнений может быть весьма трудоемким. (См. также задачи 9.1—9.5.)

9.3. Идентификация дискретных систем методом инвариантного погружения

Идентификация дискретных систем методом инвариантного погружения аналогична идентификации непрерывных систем. В дискретном случае эквивалентная двухточечная краевая задача для уравнений (9.16), (9.17) принимает вид

$$\mathbf{y}(k+1)=\mathbf{g}(\mathbf{y},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u},k), \tag{9.35}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(k+1)=\mathbf{h}(\mathbf{y},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u},k), \tag{9.36}$$

где $kT=t$, $k=0,\ldots,N$, а T — интервал квантования. Граничные условия снова определяются в виде

$$\boldsymbol{\lambda}(0)=\mathbf{a}, \tag{9.37}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(N)=\mathbf{b}. \tag{9.38}$$

Более общее конечное условие для текущей переменной N определяется так же, как в уравнении (9.20):

$$\boldsymbol{\lambda}(N)=\mathbf{C}(N). \tag{9.39}$$

Следовательно,

$$\mathbf{y}(N)=\mathbf{F}(\mathbf{C},N). \tag{9.40}$$

Преобразования производятся подобно непрерывному случаю из разд. 9.2, если обозначить $t=kT$ и $t_f=NT$. В итоге получаются аналогичные результаты оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R., Kalaba R., Wing G., Invariant Imbedding and Mathematical Physics, I — Particle Processes, *Jour. Math. Phys.*, **1**, pp. 280—308 (1960).
2. Bellman R., Kagiwada H., Kalaba R., Shridar R., Invariant Imbedding and Nonlinear Filtering Theory, *Jour. Astro. Sci.*, **13**, pp. 110—115 (1966).
3. Detchmendy D. M., Shridar R., Sequential Estimation of State and Parameters in Noisy Non-linear Dynamical Systems, *Trans. ASME, Jour. Basic Eng.*, **88**, pp. 362—366 (1966). [Русский перевод: *Труды амер. об-ва инженеров-механиков*, серия Д, 1966, № 2, с. 70.]
4. Sage A. P., Masters G. W., On-line Estimation of States and Parameters of Discrete Non-linear Dynamic Systems, Proc. National Electronics Conf., Vol. 22, pp. 677—682, 1966.
5. Sage A. P., Optimum Systems Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968.

Задачи

1. Используйте метод инвариантного погружения для идентификации постоянных параметров a, b системы $\dot{x}=ax+bu$ по измерениям $z=x+v$, где v — шум с нулевым средним; величина z (при интервале 0,1) равна

$z(t) =$ 0,012, 0,0134, 0,166, 0,169, 0,209, 0,065, 0,206, 0,348, 0,347, 0,402, 0,438, 0,437, 0,422, 0,517, 0,535, 0,534, 0,582, 0,59, 0,654, 0,565, 0,58, 0,512, 0,584, 0,58, 0,561, 0,471, 0,45, 0,545, 0,402, 0,437, 0,307, 0,323, 0,353, 0,358, 0,227, 0,325, 0,284, 0,265, 0,303, 0,365, 0,189, 0,218, 0,32, 0,395, 0,466, 0,414, 0,418, 0,451, 0,423, 0,414, 0,567, 0,573, 0,675, 0,674, 0,661, 0,598, 0,611, 0,682, 0,619, 0,802, 0,714, 0,623, 0,642, 0,659, 0,601, 0,608, 0,5, 0,443, 0,491, 0,498, 0,41, 0,383, 0,342, 0,429, 0,242, 0,362, 0,346, 0,309, 0,242, 0,341, 0,212, 0,296, 0,4, 0,388, 0,328, 0,39, 0,456, 0,443, 0,55, 0,594, 0,644, 0,533, 0,619, 0,598, 0,551, 0,605, 0,673, 0,768, 0,672, 0,666, 0,788, 0,733, 0,629, 0,651, 0,612, 0,585, 0,55, 0,545, 0,438, 0,409, 0,415, 0,439, 0,355, 0,356, 0,38, 0,391, 0,299, 0,281, 0,264, 0,295, 0,184, 0,324, 0,248, 0,411, 0,481, 0,411, 0,473, 0,352, 0,546, 0,525, 0,592, 0,592, 0,523, 0,591, 0,685, 0,625, 0,713, 0,682, 0,756, 0,788, 0,78, 0,727, 0,634, 0,58, 0,553, 0,514, 0,518, 0,467, 0,449, 0,527, 0,409, 0,459, 0,488, 0,477, 0,375, 0,275, 0,3, 0,282, 0,257, 0,371, 0,278,

а $u(t)$ — прямоугольная волна, имеющая колебания от 1 до 0 на интервале 0,2, начиная с 1 в момент $t=0{,}2$. Начальные условия для метода инвариантного погружения следующие: $\mathbf{Q}=\mathbf{I}$, $\hat{x}(0)=z(0)$, $\hat{a}(0)=\hat{b}(0)=1{,}0$.

2. Решите задачу 1 при $\hat{a}(0)=\hat{b}(0)=1{,}5$ и при $\mathbf{Q}(0)=\mathbf{I}$.

3. Решите задачу 1 при $\hat{a}(0)=\hat{b}(0)=1{,}0$ и при $\mathbf{Q}(0)=0{,}2\cdot\mathbf{I}$, $5\cdot\mathbf{I}$, $10\cdot\mathbf{I}$.

4. Решите задачу 1 при $\hat{a}(0)=\hat{b}(0)=0$ и при $\mathbf{Q}(0)=5\cdot\mathbf{I}$, $10\cdot\mathbf{I}$.

5. Идентифицируйте параметры стационарной нелинейной системы, описываемой уравнениями $\dot{x}=ax^2$, $z=x+v$, где v — шум с нулевым средним, при начальных условиях $\hat{a}(0)=-1{,}0$,

$\hat{x}(0) = 1{,}0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ и при следующих данных измерений (с интервалом 0,1):

$z(t) =$ 1,0, 0,833, 0,714, 0,625, 0,555, 0,5, 0,455, 0,417, 0,385, 0,357, 0,333, 0,313, 0,294, 0,278, 0,263, 0,25, 0,238, 0,227, 0,217, 0,208, 0,2, 0,192, 0,185, 0,178, 0,172, 0,167, 0,161, 0,156, 0,152, 0,147, 0,143, 0,139, 0,135, 0,132, 0,128, 0,125, 0,122, 0,199, 0,116, 0,114, 0,111, 0,109, 0,106, 0,104, 0,102, 0,1, 0,098, 0,096, 0,0944, 0,0926, 0,091.

10

Идентификация с использованием прогноза и градиентного метода прогнозирования

10.1. Идентификация и управление с использованием прогноза

Метод идентификации с использованием прогноза является по существу методом определения в реальном масштабе времени импульсной переходной функции. В этом методе используются дискретные данные о входе и выходе [1, 2]. Рассматриваемый метод позволяет на каждом интервале управления непосредственно определять вектор управления для следующего шага по результатам идентификации на предыдущем шаге, причем компоненты вектора управления представляют собой импульсы с шириной, равной одному интервалу дискретизации. Управление формируется непосредственно по импульсной переходной функции без какого-либо преобразования ее в форму передаточной функции или дифференциального уравнения, что обеспечивает относительно высокое быстродействие. Данный метод в некотором смысле имеет сходство с процессом идентификации, выполняемым человеком. Например, при управлении автомобилем даже неопытному водителю не нужно знать модель характеристик рулевого управления, представляемую в форме дифференциальных уравнений. Однако водитель будет прогнозировать траекторию автомобиля и принимать решение об управлении на следующем шаге с учетом отклонения траектории автомобиля от расчетной. Рассмотренная аналогия показывает, что идентификация с прогнозом имеет некоторые особенности, которые свойственны методу обучения. Метод идентификации с прогнозом применим для линейных и нелинейных систем, которые полагаются стационарными на нескольких интервалах управления.

Процедура идентификации выполняется непрерывно на каждом интервале управления, и результат идентификации обновляется при изменении параметров, которое происходит достаточно медленно на каждом интервале управления.

В рассматриваемой ниже процедуре градиентного прогноза используются принципы идентификации с прогнозом и анализируется изменение показателя качества от входных управляющих воздействий, а не реакции выхода системы на эти воздействия, как в методе идентификации с прогнозом.

10.1.1. Процессы с одним входом

Рассмотрим линейную систему (рис. 10.1), где u — вход системы, а $\mathbf{y}$ — n-мерный вектор выхода, имеющий компоненты от y_1 до y_n. Вход $u(t)$ представлен в форме дискретных ступенчатых воздействий $u(kT)$ при $k=1, 2, \ldots$, где T — интервал управления. В некоторый момент времени $t=kT$ можно предсказать выход в момент $kT+\tau$ ($\tau \leqslant t$) на основе данных с момента $t=kT-T$ до $t=kT$, если предположить, что входное воздействие u с момента $t=kT-T$ остается неизменным. Последнее предположение необходимо, так как любое новое изменение u при $t=kT$ делает несостоятельными данные об $\mathbf{y}$ на интервале от $kT-T$ до kT для целей прогноза с момента $t=kT$ (рис. 10.2). В связи с этим определим $y_{ip0}(kT+\tau)$ как оцениваемую величину y_i, которая прогнозируется в момент $t=kT$ в соответствии с данными измерений на последнем интервале управления (от $kT-T$ до kT), когда предполагается

$$\Delta u(kT) = 0, \tag{10.1а}$$

где

$$\Delta u(kT) \stackrel{\Delta}{=} u(kT) - u(kT-T). \tag{10.1б}$$

Если затем подается ненулевое воздействие $\Delta u(kT)$ в момент $t=kT$, то по соответствующему измеряемому выходу $y_i(t)$, $\forall\, kT \leqslant t < kT+T$, можно определить реакцию системы $q_i(\tau)$ в i-м выходе на ступенчатое воздействие $\Delta u(kT)$ следующим образом [1]:

$$q_i(\tau) = \frac{y_i(kT+\tau) - y_{ip0}(kT+\tau)}{\Delta u(kT)}, \quad \forall kT < \tau < kT+T, \tag{10.2}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{q}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\Delta u(kT)} (\mathbf{y}(kT+\tau) - \mathbf{y}_{p0}(kT+\tau)), \tag{10.3}$$

где $\mathbf{q}$ — вектор идентификации, имеющий компоненты $q_1, \ldots, q_n$. В этой постановке задачи предполагается, что система является линейной или линеаризованной [приращения u и y_i малы на

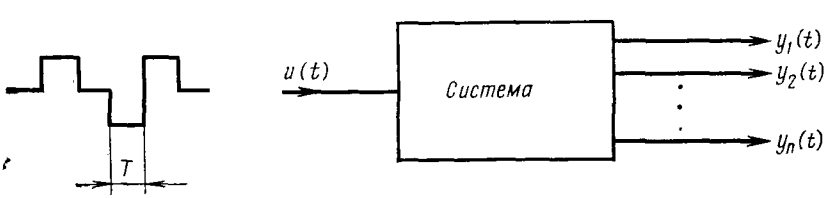


Рис. 10.1. Система с одним входом.

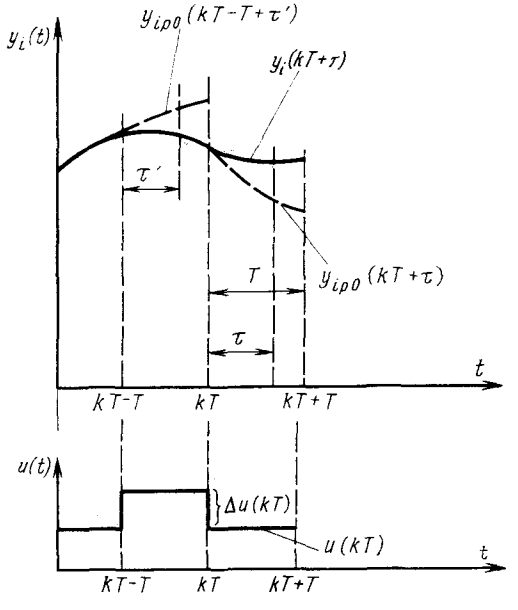


Рис. 10.2. Описание y_{p0}.

$(k+1)$-м интервале с момента kT до $kT+T$]. Из уравнения (10.3) следует, что реакция в i-м выходе системы на единичный импульс шириной T есть $q_i(\tau)$, $\forall\, 0<\tau<t$, причем эта реакция определяется на каждом интервале управления. Реакция $q_i(\tau)$ представляет собой переходную функцию при $0<\tau<T$, так как на интервалах до момента $t=kT+T$ импульс $\Delta u(kT)$ может рассматриваться как ступенчатое воздействие. Таким образом, уравнение (10.3) позволяет осуществить идентификацию только импульсной характеристики. Однако, поскольку на каждом интервале управления входное воздействие представлено в форме импульса $\Delta u(kT)$, реакция на импульсное входное воздействие позволяет получить достаточный объем информации для целей управления. Поэтому информация о реакции на ступенчатое воздействие может быть непосредственно использована для вычисления поправки к управляющему воздействию $\Delta u(kT+\tau)$ на следующем интервале, которая также является импульсом. Кроме того, не требуется преобразование информации об этой реакции в другую форму, например в форму передаточной функции или дифференциального уравнения. Предположение, что реакция $\mathbf{q}(\tau)$ вычисляется только при $\tau<T$, вполне допустимо, так как по истечении каждого интервала длительностью T вы-

числяется новый импульс управления $\Delta u(kT)$. Влияние предыдущих импульсов учитывается в прогнозе $\mathbf{y}_{p0}$. Таким образом, из уравнения (10.3) определяется только реакция на воздействие $\Delta u(kT)$. В результате вычисляется изменение управляющего воздействия $\Delta u(kT)$ на каждом интервале для того, чтобы максимально приблизить величину $\mathbf{y}(kT+\tau)$, прогнозируемую при $\Delta u(kT)=0$, к заданной величине $\mathbf{y}_d(kT+\tau)$ так, чтобы показатель J_k достигал минимума, где

$$J_{k+1} = \int_0^T \left[\left(\mathbf{e}_p^T \mathbf{H} \mathbf{e}_p\right)_{kT+\tau} + \rho u_{kT}^2\right] d\tau, \quad \forall t = kT+\tau, \ \tau < T. \tag{10.4}$$

Здесь $\mathbf{H}$ — положительно определенная симметрическая весовая матрица, ρ — вес затрат на управление и

$$\hat{\mathbf{y}}(kT+\tau) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{y}_{p0}(kT+\tau) + \Delta u(kT)\,\mathbf{q}(\tau), \tag{10.5а}$$

$$\mathbf{e}_p(kT+\tau) \stackrel{\Delta}{=} \hat{\mathbf{y}}(kT+\tau) - \mathbf{y}_d(kT+\tau), \tag{10.5б}$$

$$\mathbf{e}_{p0}(kT+\tau) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{y}_{p0}(kT+\tau) - \mathbf{y}_d(kT+\tau), \tag{10.5в}$$

$$\mathbf{e} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{y} - \mathbf{y}_d. \tag{10.5г}$$

Требование о том, чтобы матрица $\mathbf{H}$ была положительно определенной и симметрической, введено из соображений устойчивости [3], которые основаны на теореме Ляпунова [4] и не рассматриваются в данной книге. Минимизация J_{k+1} достигается путем подстановки $\mathbf{e}_p$ из уравнения (10.5) в (10.4) и последовательного дифференцирования J_{k+1} по Δu в уравнении (10.4). Отметим, что ошибка $\mathbf{e}_{p0}(kT+\tau)$ не зависит от $\Delta u(kT)$, так как по определению она получается в результате экстраполяции $\mathbf{y}$ (или $\mathbf{e}$) при $\Delta u(kT)=0$. Следовательно, управление $\Delta u(kT)$ должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial J_{k+1}}{\partial \Delta u(kT)} = 0, \tag{10.6}$$

из которого при подстановке $\mathbf{e}_p$ из уравнения (10.5) и выражений для J_k и $[u(kT-T)+\Delta u(kT)]$ можно получить

$$\Delta u(kT) = -\frac{\int_0^T \left[\rho u(kT-T) + \mathbf{e}_{p0}^T(kT+\tau)\,\mathbf{H}\mathbf{q}(\tau)\right] d\tau}{\int_0^T \left[\rho + \mathbf{q}^T(\tau)\,\mathbf{H}\mathbf{q}(\tau)\right] d\tau}, \tag{10.7}$$

где $\mathbf{e}_{p0}$ (или $\mathbf{y}_{p0}$) получается путем прогноза при $\Delta u(kT)=0$, а вектор $\mathbf{q}$ идентифицируется в соответствии с уравнением (10.2)

на $(k-1)$-м интервале. Очевидно, что если $\mathbf{y}_{p0}$ прогнозируется точно и вектор $\mathbf{q}(\tau)$, который вычисляется на интервале от $kT-T$ до kT, также используется на следующем интервале, то фактический выход $\mathbf{y}(kT+\tau)$ очень близок к $\hat{\mathbf{y}}(kT+\tau)$. Таким образом, для адекватного управления требуется, чтобы прогноз $\mathbf{y}_{p0}$ был адекватен, а вектор $\mathbf{q}(\tau)$ изменялся очень незначительно от одного интервала управления к следующему, т. е. чтобы реакция системы на ступенчатое воздействие, а следовательно, и характеристики идентифицируемой системы изменялись медленно на интервале управления T.

Процедуры прогноза, которые используются для оценки $\mathbf{y}_{p0}(kT+\tau)$, могут быть основаны на аппроксимации $\mathbf{y}(t)$ ортогональными полиномами наилучшего порядка по методу наименьших квадратов на интервале от $kT-T$ до kT, причем эта аппроксимация будет экстраполироваться путем разложения в ряд Тейлора на следующем интервале. Чтобы избежать численного дифференцирования в процедуре прогноза, при разложении в ряд Тейлора должны использоваться аналитические выражения для производных аппроксимирующего полинома в момент $t=kT$ [1]. С учетом свойств ошибок для такой аппроксимации предпочтительнее использовать полиномы Чебышева, как упоминалось в разд. 5.6 данной книги, где также обсуждался вопрос о выборе наилучшего полинома [5]. Для прогноза, как показано ниже в гл. 12, можно использовать также более сложные процедуры, однако такое усложнение обычно сопровождается увеличением продолжительности процедуры. Отметим, что прогноз необходим на интервале T (т. е. до момента $t+T$, где t — текущее время), равном периоду, на котором можно получить данные измерений для прогноза, так как новые входные воздействия подаются в моменты времени $t=T, 2T, \ldots$, тем самым нарушая стационарность выхода через каждые T секунд. (Дальнейшее обсуждение задач прогноза проводится в гл. 12.)

Рассмотренный метод прогноза применим к совместным процедурам идентификации и управления в реальном масштабе времени, так как вход $u(kT)$, который вычисляется с целью минимизации J_{k+1} в уравнении (10.4), также используется для идентификации вектора $\mathbf{q}$ на k-м интервале в соответствии с уравнением (10.3). Вектор $\mathbf{q}$ этого интервала последовательно используется на следующем интервале управления для формирования необходимого управления $\Delta u(kT+T)$, которое минимизирует J_{k+1} и т. д.

Пример 10.1

Рассмотрим скалярную систему с одним входом $u(kT)$ и одним выходом $y(kT)$, которая должна отслеживать траекторию

цели $y_d(t)=2+0{,}5t$, где $t=kT$, а T — интервал управления, равный 0,1. В момент времени $t=0{,}9$ система находится в состоянии $y(t)=2{,}1$. Поведение системы измеряется на интервале от $t=0{,}9$ до $t=1{,}0$. Система отслеживает траекторию $y(t)=4{,}1-2\exp(0{,}9-t)$, $0{,}9\leqslant t<1$, таким образом, что при $t=1{,}0$ достигается точка 2,293. В этот момент времени цель находится в точке $y_d=2{,}5$. Предполагая, что интеграл J_{k+1} в уравнении (10.4) является суммой двух величин на каждом интервале T:

$$J_{k+1}=\sum_{i=1}^{2}(e_{pi}^2+0{,}1\,u_{pi}^2),$$

получим на 11-м интервале (от $t=1{,}0$ до $t=1{,}1$)

$$J_{11}=e_p^2(10{,}5)+u_p^2(10{,}5)+e_p^2(11)+u_p^2\ (11).$$

Кроме того, имеются измерения на интервале от 0,8 до 0,9, показывающие, что координата $y(t)$ на этом интервале равна 2,2, а поправка к управлению при $t=0{,}9$ равна $u(9)=\Delta u(9)=0{,}2$.

Экстраполяция y до $t=1{,}1$ дает $y_{p0}(10{,}5)=2{,}378$ и $y_{p0}(11)=2{,}462$, тогда как $y_d(10{,}5)=2{,}525$ и $y_d(11)=2{,}55$ дают $e_{p0}(10{,}5)=-0{,}147$ и $e_{p0}(11)=-0{,}088$. Кроме того, из измерения y на интервалах от 0,8 до 0,9 и от 0,9 до 1,0, а также $\Delta u(g)$ следует

$$q(0{,}5)=\frac{y(9{,}5)-y_{p0}(9{,}5)}{\Delta u(g)}=\frac{2{,}198-2{,}1}{0{,}2}=0{,}49$$

и

$$q(1)=\frac{y(10)-y_{p0}(10)}{\Delta u(g)}=\frac{2{,}293-2{,}1}{0{,}2}=0{,}95.$$

Поэтому $\Delta u(10)$, определяемое из уравнения (10.7), равно $0{,}135/1{,}34=0{,}1$ и $u(10)=0{,}3$; при этом $y(10{,}5)=2{,}462$ и $y(11)=2{,}557$ в сравнении с $y_d(10{,}5)=2{,}525$ и $y_d(11)=2{,}550$. Аналогичные вычисления позволяют получить величины q и Δu.

10.1.2. Системы со многими входами

Вычисление компонентов q_i идентифицируемого вектора в системах с одним входом выполняется с использованием операции деления на $\Delta u(kT)$ в уравнениях (10.2) и (10.3). В случае линейных систем со многими входами уравнения (10.2) и (10.3) можно также использовать, если идентификация выполняется только по одному входу. Таким образом, для системы с m входами при идентификации все входы, кроме одного, поддерживаются постоянными на заданном интервале и только один вход

u_j изменяется на величину Δu_j. Этот процесс повторяется на m различных интервалах при $j=1, \ldots, m$, пока не закончится идентификация по всем m входам. Идентификация при таком способе состоятельна только в том случае, если процесс стационарный, по крайней мере, на m интервалах управления. Кроме того, необходимо отметить, что в отличие от системы с одним входом для систем с многими входами невозможна идентификация в реальном масштабе времени, так как при этом предполагается, что на каждом интервале управления подается воздействие только по одному входу, тогда как для получения адекватных характеристик может потребоваться одновременное использование всех входов. Таким образом, для идентификации в реальном масштабе времени необходимо, чтобы система была идентифицируемой при *всех управляющих воздействиях одновременно,* причем эти входы должны удовлетворять нормальным условиям управления системой на каждом интервале управления. Подпрограмма одновременной идентификации, которая удовлетворяет указанным требованиям, может быть основана на использовании метода линейной многомерной регрессии [6], рассмотренной в гл. 5. Такой подход можно сформулировать в терминах метода последовательной регрессии, как описано в гл. 6, для того чтобы избежать операции обращения матриц. Для вектора входа $\mathbf{u}$ с компонентами $u_1, \ldots, u_m$ обозначим

$$\Delta \mathbf{u}(kT) \triangleq \mathbf{u}(kT) - \mathbf{u}(kT - T). \tag{10.8}$$

По аналогии с уравнением (6.2) для системы с одним входом в случае системы со многими входами можно записать

$$y_i(kT + \tau) - y_{i,p0}(kT + \tau) = q_{1i}(\tau)\,\Delta u_1(kT) + \\ + \cdots + q_{mi}(\tau)\,\Delta u_m(kT), \tag{10.9}$$

где $q_{ji}(\tau)$ — реакция i-го выхода y_i в момент τ на единичный импульс $u_j(0)$ $(j \in 1, m)$. Величина y_{ip0} в уравнении (10.9) прогнозируется, как и в случае, рассмотренном в разд. 10.1.1. Уравнение (10.9) можно теперь записать в виде

$$y_i(kT + \tau) - y_{p0i}(kT + \tau) = \mathbf{q}_i^T(\tau)\,\Delta \mathbf{u}(kT), \tag{10.10}$$

где

$$\mathbf{q}_i^T \triangleq [q_{i1} \cdots q_{im}]. \tag{10.11}$$

Уравнение (10.10) представляет собой i-ю строку матричного уравнения

$$\mathbf{y}(kT + \tau) - \mathbf{y}_{p0}(kT + \tau) = \mathbf{Q}(\tau)\,\Delta \mathbf{u}(kT), \tag{10.12}$$

где матрица $\mathbf{Q}$ определяется выражением

$$\mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} q_{11} \cdots q_{1m} \\ \vdots \\ q_{n1} \cdots q_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix}. \tag{10.13}$$

Уравнение (10.12) можно рассматривать как уравнение линейной регрессии, которое аналогично уравнению (5.18), если в нем заменить $\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{u}$ на $\mathbf{y}$—$\mathbf{y}_{p0}$, $\mathbf{Q}$, $\Delta\mathbf{u}$ соответственно. Такая же аналогия существует между уравнениями (10.10) и (5.26): x_i, $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{u}$ в уравнении (5.26) заменяются на y_i—$y_{i,\,p0}$, $\mathbf{q}_i$, $\Delta\mathbf{u}$ из уравнения (10.10) соответственно. Поэтому элементы матрицы $\mathbf{Q}$ в уравнении (10.12) вычисляются с помощью метода наименьших квадратов, что дает по аналогии с уравнением (5.26) следующее выражение:

$$\mathbf{q}_i(\tau) = (\Delta\mathbf{U}_k^T \cdot \Delta\mathbf{U}_k)^{-1} \Delta\mathbf{U}_k^T \left[\mathbf{Y}_i(kT+\tau) - \mathbf{Y}_{i,p0}(kT+\tau)\right], \tag{10.14}$$

где

$$\Delta\mathbf{U} \triangleq \begin{bmatrix} \Delta u_1(kT - rT + T) \cdots \Delta u_m(kT - rT + T) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \Delta u_1(kT - T) \qquad \cdots \Delta u_m(kT - T) \\ \Delta u_1(kT) \qquad\quad \cdots \Delta u_m(kT) \end{bmatrix}, \quad r > m, \tag{10.15}$$

$$\mathbf{Y}_i(kT+\tau) \triangleq [y_i(kT - rT + T + \tau), \ldots, y_i(kT + T + \tau), y_i(kT+\tau)]^T, \tag{10.16а}$$

$$\mathbf{Y}_{i,p0}(kT+\tau) \triangleq [y_{i,p0}(kT - rT + T + \tau), \ldots, y_i(kT+\tau)]^T. \tag{10.16б}$$

Для вычисления матрицы $\mathbf{Q}$ в соответствии с уравнением регрессии (10.14) необходимо запоминать последние r измерений $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$. Поэтому необходимо предположить стационарность (или по крайней мере квазистационарность) системы на r интервалах управления. Однако можно непрерывно осуществлять процедуру идентификации и при слабой нестационарности параметров системы. Элементы матрицы $\mathbf{Q}$, которые были идентифицированы в соответствии с уравнением (10.14), можно теперь использовать для получения вектора управления $\Delta\mathbf{u}(kT)$, который минимизирует показатель качества J_k, определяемый выражением

$$J_{k+1} = \int_0^T \left[(\mathbf{e}_p^T \mathbf{H} \mathbf{e}_r)_{kT+\tau} + (\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u})_{kT}\right] d\tau =$$

$$= \int_0^T \mathrm{tr}\left[(\mathbf{H} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p^T)_{kT+\tau} (\mathbf{R} \mathbf{u} \mathbf{u}^T)_{kT}\right] d\tau, \tag{10.17}$$

которое и является аналогом J_{k+1} уравнения (10.4) для системы со многими входами. Здесь $\mathbf{H}$, $\mathbf{R}$ — положительно определенные симметрические матрицы (принимаемые такими по соображениям устойчивости), как в уравнении (10.4), а $\mathbf{e}_p$ имеет тот смысл, что и в уравнении (10.5). Поэтому $\Delta\mathbf{u}(kT)$ должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial J_{k+1}}{\partial \Delta \mathbf{u}(kT)} = 0 \tag{10.18}$$

для того, чтобы путем дифференцирования матрицы, как показано в приложении 2, и подстановки у вместо J_{k+1} из уравнения (10.12) можно было получить

$$2\int_0^T \left[\mathbf{Q}^T(\tau)\,\mathbf{H}e_{p0}(kT+\tau) + \mathbf{R}u(kT-T) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{R}\Delta\mathbf{u}(kT) + \mathbf{Q}^T(\tau)\,\mathbf{H}\mathbf{Q}(\tau)\,\Delta\mathbf{u}(kT)\right] d\tau = 0, \tag{10.19}$$

или, поскольку $\Delta\mathbf{u}(kT)$ не зависит от τ,

$$\int_0^T \left[\mathbf{Q}^T(\tau)\,\mathbf{H}e_{p0}(kT+\tau) + \mathbf{R}u(kT-T)\,d\tau = \right.$$
$$= -\int_0^T \left[\mathbf{R}+\mathbf{Q}^T(\tau)\,\mathbf{H}\mathbf{Q}(\tau)\right] d\tau\,\Delta\mathbf{u}(kT), \tag{10.20}$$

или, наконец,

$$\Delta\mathbf{u} = -\left\{\int_0^T \left[\mathbf{R}+\mathbf{Q}^T(\tau)\,\mathbf{H}\mathbf{Q}(\tau)\right] d\tau\right\}^{-1}\left\{\int_0^T \left[\mathbf{Q}^T(\tau)\,\mathbf{H}e_{p0}(kT+\tau)+\mathbf{R}u(kT)\right]\right\}. \tag{10.21}$$

10.1.3. Идентификация нелинейных процессов с использованием прогноза

В тех случаях, когда нелинейностями нельзя пренебречь, можно использовать нелинейные соотношения регрессии, как в разд. 5.6, чтобы получить выражение для реакции системы на импульсные воздействия $\Delta u(kT)$. Реакция на воздействие $\Delta u(kT)$ при аппроксимации нелинейности, например полиномом третьей степени, описывается следующим выражением:

$$y_i(kT+\tau) - y_{ip0}(kT+\tau) = q'_{i1}\,\Delta u_1(kT) +$$
$$+ q'_{i2}\,\Delta u_2(kT) + \cdots + q'_{im}\,\Delta u_m(kT) + q''_{i1}\,\Delta u_1^2(kT) +$$
$$+ \cdots + q''_{im}\,\Delta u_m^2(kT) + q'''_{i1}\,\Delta u_1^3(kT) +$$
$$+ \cdots + q'''_{im}\,\Delta u_m^3(kT), \tag{10.22}$$

где y_{ip0} вычисляется путем прогноза, как в случае, рассмотренном в разд. 10.1.1,

$$\Delta u_1 \triangleq \Delta v_1, \ldots, \Delta u_m \triangleq \Delta v_m,$$
$$\Delta u_1^2 \triangleq \Delta v_{m+1}, \ldots, \Delta u_m^2 \triangleq \Delta v_{2m}, \tag{10.23}$$
$$\Delta u_1^3 \triangleq \Delta v_{2m+1}, \ldots, \Delta u_m^3 \triangleq \Delta v_{3m}$$

и

$$q'_{i,1} \triangleq p_{i,1}, \ldots, q'_{im} \triangleq p_{im},$$
$$q''_{i,1} \triangleq p_{i,m+1}, \ldots, q''_{im} \triangleq p_{i2m}, \tag{10.24}$$
$$q'''_{i,1} \triangleq p_{i,2m+1}, \ldots, q'''_{im} \triangleq p_{i3m}.$$

Уравнение (10.22) можно рассматривать как уравнение линейной регрессии, которое аналогично уравнению (10.10) или (5.26):

$$y_i(kT+\tau) - y_{ip0}(kT+\tau) = \mathbf{p}_i^T(\tau)\,\Delta\mathbf{v}(kT). \tag{10.25}$$

Здесь

$$\mathbf{p}_i^T \triangleq [p_1, p_2, \ldots, p_{3m}], \tag{10.26а}$$

$$\Delta\mathbf{v} \triangleq [\Delta v_1, \ldots, \Delta v_{3m}]. \tag{10.26б}$$

Отметим, что идентификация p_i в уравнении (10.26а) даже в случае нескольких входов предполагает запоминание данных по крайней мере на $3m+1$ интервалах управления, для чего необходима стационарность процесса по крайней мере в пределах этих интервалов. Кроме того, вычисление входного вектора управления $\Delta\mathbf{u}$ для минимизации показателя J_k [уравнение (10.17)] уже нельзя производить аналитическим способом. Таким образом, во многих случаях для определения воздействия Δu предпочтительнее использовать процедуры управления, основанные на градиентном методе прогноза (см. разд. 10.2), которые применимы как к линейным, так и к нелинейным процессам и в которых число идентифицируемых параметров значительно меньше.

10.2. Идентификация и управление на основе градиентного метода с прогнозом

Метод идентификации с прогнозом, рассмотренный в разд. 10.1, применим для идентификации отдельных выходов или состояния системы, тогда как в градиентном методе

с прогнозом анализируется поведение только одного скалярного показателя качества [7]. Поэтому число параметров, которые необходимо идентифицировать рассматриваемым ниже градиентным методом с прогнозом, значительно уменьшено.

Расссмотрим линейный процесс, который описывается следующим дискретным уравнением измеряемых состояний:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10.27}$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ — векторы состояния и управления соответственно, а $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — неизвестные матрицы, элементы которых могут быть переменными во времени. Управление формируется в соответствии с показателем качества J, который задан выражением

$$J(kT+T) \triangleq \mathbf{e}^T(kT+T)\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}(kT+T)+\mathbf{u}^T(kT)\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}(kT) = \\ = \operatorname{tr}\left[(\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^T)_{kT+T} + (\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^T)_{kT}\right], \tag{10.28}$$

где $\mathbf{H}$, $\mathbf{R}$ — положительно определенные симметрические матрицы, выбираемые по соображениям устойчивости в таком виде, как и в уравнении (10.4), $\mathbf{e}$ — разность между $\mathbf{x}$ и соответствующим заданным вектором $\mathbf{x}_d$. Определим линеаризованное соотношение для прогноза, которое описывает прогнозируемое изменение J_{k+1} при небольших изменениях вектора управления $\Delta\mathbf{u}$:

$$\Delta J_p(kT+T) \triangleq \mathbf{S}^T(kT)\,\Delta\mathbf{u}(kT) = \operatorname{tr}[\mathbf{S}(kT)\,\Delta\mathbf{u}^T(kT)], \tag{10.29}$$

где

$$\Delta\mathbf{u}(kT) \triangleq \mathbf{u}(kT) - \mathbf{u}(kT-T), \tag{10.30}$$

а $J_p(kT+T)$ — прогнозируемое значение $J(kT+T)$ по данным измерений J вплоть до $t=kT$ в предположении $\Delta\mathbf{u}(kT)=0$. Матрицу $\mathbf{S}$ в уравнении (10.29) можно рассматривать как приближенный прогнозируемый градиент $\Delta\mathbf{J}_p$ по $\Delta\mathbf{u}$. Поэтому, учитывая определение J в уравнении (10.28), можно записать

$$\mathbf{S}(kT) = \frac{\partial J(kT+T)}{\partial\mathbf{u}(kT)} = \frac{\partial\left\{\operatorname{tr}\left[(\mathbf{H}\mathbf{e}\mathbf{e}^T)_{kT+T} + (\mathbf{R}\mathbf{u}\mathbf{u}^T)_{kT}\right]\right\}}{\partial\mathbf{u}(kT)}. \tag{10.31}$$

В соответствии с уравнением (10.27) имеем

$$\mathbf{e}(kT+T) = \mathbf{x}(kT+T) - \mathbf{x}_d(kT+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \\ + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) - \mathbf{x}_d(kT+T). \tag{10.32}$$

Поэтому уравнение (10.31) принимает вид

$$\mathbf{S}(kT) = \partial\left\{\operatorname{tr}\left[\mathbf{H}\left(\mathbf{A}\mathbf{x}_{kT} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{kT} - \mathbf{x}_{d,kT+T}\right)\left(\mathbf{A}\mathbf{x}_{kT} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{kT} - \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. - \mathbf{x}_{d,kT+T}\right)^T + \mathbf{R}\mathbf{u}_{kT}\mathbf{u}_{kT}^T\right]\right\}/\partial\mathbf{u}_{kT}. \tag{10.33}$$

Тогда в соответствии с приложением 2 получаем

$$\mathbf{S}(kT) = 2\mathbf{x}^T\mathbf{H}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{kT} - \mathbf{x}_{d,kT+T}) + 2(\mathbf{B}^T\mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{R})\mathbf{u}_{kT}. \quad (10.34)$$

Из уравнения (10.34) следует, что матрица **S** нестационарна, даже если матрицы **A**, **B**, **R** и **H** стационарны, так как векторы **u**, **x** и $\mathbf{x}_d$ могут изменяться от одного интервала управления к следующему. Следовательно, матрица **S** будет изменяться во времени быстрее, чем матрицы **A** и **B**, если последние также нестационарны.

Матрицу **S** нельзя рассматривать как стационарную даже на коротких интервалах управления, на которых матрицы **A** и **B** изменяются незначительно. Все же уравнение (10.34) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{S}(kT) = \boldsymbol{\sigma}_x\mathbf{x}(kT) - \boldsymbol{\sigma}_{xd}\mathbf{x}_d(kT+T) + \boldsymbol{\sigma}_u\mathbf{u}(kT), \quad (10.35)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{xd}$, $\boldsymbol{\sigma}_u$ — стационарные матрицы для стационарных или квазистационарных процессов:

$$\boldsymbol{\sigma}_x \triangleq 2\mathbf{B}^T\mathbf{H}\mathbf{A}, \quad (10.36а)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{xd} \triangleq 2\mathbf{B}^T\mathbf{H}, \quad (10.36б)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_u \triangleq 2(\mathbf{B}^T\mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{R}). \quad (10.36в)$$

Если подставить выражение для матрицы **S** из уравнения (10.35) в (10.29), то получим

$$\Delta J_p(kT+T) = \mathbf{x}^T(kT)\boldsymbol{\sigma}_x^T\Delta\mathbf{u}(kT) - \mathbf{x}_d^T(kT+T)\boldsymbol{\sigma}_{xd}^T\Delta\mathbf{u}(kT) + \\ + \mathbf{u}^T(kT)\boldsymbol{\sigma}_u^T\Delta\mathbf{u}(kT) = \mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\sigma}_x\mathbf{x}(kT)\Delta\mathbf{u}^T(kT) - \\ - \boldsymbol{\sigma}_{xd}\mathbf{x}_d(kT+T)\Delta\mathbf{u}^T(kT) + \\ + \boldsymbol{\sigma}_u\mathbf{u}(kT)\Delta\mathbf{u}^T(kT)]. \quad (10.37)$$

Если вектор состояния **x** может быть определен по результатам измерений (например, выходов и их производных), то уравнение (10.37) можно рассматривать как нелинейное уравнение регрессии, коэффициенты которого равны $\boldsymbol{\sigma}_x^T$, $\boldsymbol{\sigma}_{xd}^T$, $\boldsymbol{\sigma}_u$. Если n и m — размерности векторов **x** и **u** соответственно, то σ_x, σ_{xd} — $m\times n$-мерные матрицы (у которых m строк и n столбцов), а $\boldsymbol{\sigma}_u$ — симметрическая (вследствие симметрии матрицы **H**) m^2-мерная матрица. Общее число коэффициентов в уравнении (10.37) равно $N \cong 2nm + m^2/2$ (или $nm + m^2/2$, если $\mathbf{x}_d = 0$), хотя общее число элементов матриц **A**, **B** равно $n^2 + m^2$. Следовательно, для идентификации матриц **A**, **B** с помощью регрессионного метода в соответствии с уравнением (10.27) требуется стационарность или квазистационарность только на $n+m+1$ интервалах управления, тогда как при идентификации $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{xd}$, $\boldsymbol{\sigma}_u$ из

уравнения (10.37) следует, что необходима стационарность или квазистационарность на $2nm+m^2/2+1$ интервалах (или $nm+$ $+m^2/2+1$ интервалах при $\mathbf{x}_d=0$). При $n \gg m$ общее число элементов в $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{xd}$ и $\boldsymbol{\sigma}_u$ меньше, чем в матрицах **A**, **B**. Однако идентификация матриц **A**, **B** всегда выполняется быстрее, так как все строки в уравнении (10.27) рассматриваются одновременно, причем каждая строка содержит не более $n+m$ элементов матриц **A**, **B**. Матрицу **S** можно идентифицировать непосредственно регрессионным методом из уравнения (10.29) лишь при условии, что вариации **x**, $\mathbf{x}_d$, **u** на $m+1$ интервалах очень малы. В связи с этим обычно предпочтительнее получать $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{xd}$, $\boldsymbol{\sigma}_u$ путем регрессионной идентификации матриц **A**, **B** в соответствии с уравнением (10.27), как показано в гл. 5,6.

Для определения $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{xd}$ и $\boldsymbol{\sigma}_u$ можно использовать процедуру градиентного управления с прогнозом, основанную на методе статической градиентной оптимизации [8]. При этом лагранжиан L можно определить следующим образом [7]:

$$L_k \stackrel{\Delta}{=} J_p(kT+T) - \gamma(|\Delta \mathbf{u}(kT)|^2 - r^2), \tag{10.38}$$

где γ — множитель Лагранжа, а r — константа:

$$r^2 = |\mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^{m} u_i^2, \tag{10.39}$$

где u_i — i-й элемент **u**.

Оптимальное градиентное управление $\Delta\mathbf{u}^0$ должно удовлетворять соотношению

$$\partial L_k/\partial \mathbf{u} = \nabla \mathbf{L}_k = \nabla \mathbf{J}_p(kT+T) - 2\gamma \Delta \mathbf{u}^0(kT) = \mathbf{0}. \tag{10.40}$$

Поэтому, учитывая уравнение (10.29), получаем

$$\Delta \mathbf{u}^0(kT) = (2\gamma)^{-1} \nabla \mathbf{J}_p(kT) = (2\gamma)^{-1} \mathbf{S}(kT). \tag{10.41}$$

Подстановка выражения для $\mathbf{u}^0$ из уравнения (10.41) в (10.39) дает

$$|\Delta \mathbf{u}^0(kT)|^2 = r^2 = (2\gamma)^{-2} |\nabla \mathbf{J}_p(kT)|^2 \tag{10.42}$$

и

$$\gamma = (\pm)|\nabla \mathbf{J}_p(kT+T)|/2r = (\pm)|\mathbf{S}(kT)|/2r. \tag{10.43}$$

Используя последнее выражение для γ, преобразуем уравнение (10.41) к виду

$$\Delta \mathbf{u}^0(kT) = (\pm)\mathbf{S}(kT)\frac{r}{|\mathbf{S}(kT)|}. \tag{10.44}$$

Поскольку для градиентного подхода приращение ΔJ на каждом интервале управления не должно превышать некоторой ве-

личины $\Delta J_{\text{макс}}$, подставляя выражение для $\Delta \mathbf{u}^0$ из уравнения (10.44) в (10.29), получим

$$\Delta J_{\text{макс}}(kT+T) = (\pm)\frac{\mathbf{S}^T(kT)\,\mathbf{S}(kT)\,r}{|\mathbf{S}(kT)|} = (\pm)\frac{|\mathbf{S}(kT)|^2\,r}{|\mathbf{S}(kT)|}. \quad (10.45)$$

При этом r удовлетворяет условию

$$r = -\Delta J_{\text{макс}}/|\mathbf{S}|. \quad (10.46)$$

В итоге получаем субоптимальное управление (так как затраты на бесконечном интервале времени здесь не учтены)

$$\Delta \mathbf{u}^0(kT) = -\mathbf{S}(kT)\frac{\Delta J_{\text{макс}}}{\sum_{i=1}^{m} S_i^2} = -\mathbf{S}(kT)\frac{\Delta J_{\text{макс}}}{|\mathbf{S}|^2}. \quad (10.47)$$

Знак в уравнениях (10.45) и (10.46) определяется условием, что величина ΔJ отрицательна на каждом интервале управления независимо от S_i.

Показатель качества J в уравнении (10.28), на анализе поведения которого основан метод прогнозируемого градиента, применим как к линейным, так и к нелинейным системам и к тому же сам нелинеен по $\mathbf{x}$ и по $\mathbf{u}$. Однако этот метод применим только в случае малых приращений J (вплоть до величины $\Delta J_{\text{макс}}$ на одном интервале управления), что ограничивает величину $\Delta \mathbf{u}$ в соответствии с уравнением (10.45). Поэтому уравнение (10.27) можно рассматривать как линеаризованное дискретное уравнение состояния для нелинейных процессов. Рассмотренный выше метод прогнозируемого градиента можно применять к нелинейным процессам, которые линеаризуются при небольших приращениях. В этих случаях матрицу, описывающую градиент затрат, можно определить через стационарные параметры некоторой нелинейности, связывающей вход и выход.

Пример 10.2

Данный метод можно проиллюстрировать следующим примером. Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$
$$kT = t, \quad T = 0{,}01,$$

которую необходимо идентифицировать и которая должна последовательно управляться таким образом, чтобы минимизировался показатель качества J в уравнении (10.28) при $\mathbf{H}=\mathbf{I}$, $\mathbf{R}=0{,}1$, $\mathbf{x}_d=\mathbf{0}$ и измерениях $\mathbf{x}$, u (табл. 10.1). По данным табл. 10.1 последовательно определяются параметры $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_u$ уравнения (10.35) путем регрессии, так что $\boldsymbol{\sigma}_x=[0{,}04,\ 1{,}96]$,

Таблица 10.1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1(k)$	0	0	—0,02	—0,02	—0,02	0	0,06	0,12	0,16	0,2	0,26
$x_2(k)$	0	—1	0,02	0,02	1,02	3	2,94	1,88	1,84	2,84	4,78
$u(k)$	—1	1	0	1	2	0	—1	0	1	2	1

σ_u=2,2. Определение σ_x, σ_u позволяет осуществить идентификацию стационарных параметров нелинейной и нестационарной модели уравнения (10.29), чтобы затем сформировать стратегию управления методом прогнозируемого градиента по уравнению (10.47) с целью минимизации приращения $\Delta J(k+1)$ при любом k. Отметим снова, что σ_x, σ_u можно получить из процедуры идентификации матриц **A**, **B** и что это непрямое определение σ_x, σ_u обычно занимает меньше времени. К тому же оно позволяет осуществить управление только с прогнозом J.

ЛИТЕРАТУРА

1. Graupe D., Cassir G. R., Adaptive Control by Predictive Identification and Optimization, Proc. National Electronics Conf., Vol. 22, pp. 590—594, Chicago, 1966, also: *Trans. IEEE,* **AC-12**, pp. 191—194 (1967).
2. Powell F. D., Predictive Adaptive Control, *Trans. IEEE* **AC-14**, pp. 550—552 (1969).
3. Tou J., Modern Control Theory, McGraw-Hill, New York, 1964 (p. 343). [Русский перевод: Ту Ю. Современная теория управления. — М.: Машиностроение, 1966.]
4. Koppel L. B., Introduction to Control Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968.
5. Scheid F., Numerical Analysis, Schaum—McGraw-Hill, New York, 1968.
6. Graupe D., Swanick B. H., Cassir G. R., Reduction and Identification of Multivariable Processes, *Trans. IEEE,* **AC-13**, pp. 564—567 (1968).
7. Graupe D., Iddan G. J., A Learning Technique Based on Prediction and Reinforcement, Proc. IEEE Systems Science and Cybernetics Conf., pp. 99—102, Philadelphia, 1968.
8. Wilde D. J., Beightler C. S. Foundations of Optimization, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.

Задачи

1. Промоделируйте систему $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u$, где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & I & & \\ 0 & & & & \\ \hline -333 & -7000 & -5080 & -1540 & -214 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix},$$

k=3333 до t=9 и k=5000 [1+0,05(t—9)] при $t>9$. Используйте вышеуказанные данные для определения $\mathbf{x}$ по $\mathbf{u}$ с целью прогноза $\mathbf{x}$ и идентификации q_i в уравнении (10.2). Далее вычислите характеристики системы при отслеживании цели, которая движется по траектории $s^2x_d+sx_d+x_d=\omega(t)$, где $\omega(t)$ равно $1\forall t\geqslant 0$ и $0\forall\ t<0$, s — оператор Лапласа и $sx_d=x_d(0)=0$. При вычислении предположите, что интервал управления T равен 0,5 и что

$$H = \mathrm{diag}\left(1,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3},\ 2^{-4}\right), \quad \rho = 0.$$

2. Решите задачу 1 для нелинейной системы, заданной уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{C}u^2,$$

где $\mathbf{A}$ — матрица, такая же как и в задаче 1, и

$$\mathbf{B} = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3333]^T, \quad \mathbf{C} = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1667]^T,$$

а движение цели описывается уравнением

$$s^2x_d + sx_d + x_d = \omega(t), \quad sx_d(0) = x_d(0) = 0,$$

$$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 0{,}4 & \text{при } 0 \leqslant t < 2{,}5, \\ 1{,}0 & \text{при } t \geqslant 2{,}5. \end{cases}$$

3. Проведите идентификацию постоянных параметров σ_x, σ_{xd}, σ_u системы $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_k+\mathbf{B}\mathbf{u}_k$ по следующим данным:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1(k)$	0	—0,4	—0,86	—1,52	—2,3	—0,32	—3,56	—3,7
$x_2(k)$	0	6	0,94	1,51	—2,5	—5,6	—6,08	2,54
$u_1(k)$	—0,1	—0,4	—0,4	—0,5	—0,5	—0,2	—0,1	—0,2
$u_2(k)$	—2	—1	—1	0	1	—1	—2	—2

k	8	9	10	11	12	13	14
$x_1(k)$	—3,6	—3,83	—3,81	—3,90	—3,78	—2,95	—1,98
$x_2(k)$	0,19	—3,49	—7,49	—9,54	—3,05	—6,62	—7,5
$u_1(k)$	—0,3	—0,1	0,2	0,1	0,3	0,5	0,2
$u_2(k)$	—0,5	1	2	0	0,5	1,5	1,5

Предполагается, что $\mathbf{H}=\mathbf{I}$, $\mathbf{R}=0{,}1\mathbf{I}$.

4. Используйте процедуру идентификации из разд. 10.2 для решения задачи 1.

11

Эвристические методы идентификации

Наиболее простыми методами идентификации процесса являются эвристические методы идентификации[1]. В них отсутствует строгая математическая формулировка, и их необходимо применять только в тех случаях, когда другие методы идентификации (например, рассмотренные в гл. 3—10) оказываются неэффективными или когда математические формулировки неадекватны. Это может быть в случае систем, имеющих существенно нелинейную природу (в соотношениях вход/состояние или вход/выход), особенно когда нелинейности не являются непрерывными по входной или выходной переменной, т. е. когда аппроксимации полиномами невозможны. Эвристические методы можно также применять к процессам, описываемым сложными нелинейными функциями априорно известной формы (например, известными из теоретических рассмотрений), параметры которых необходимо идентифицировать и для которых нежелательны аппроксимации полиномами. В качестве примера можно рассмотреть следующее уравнение, которое используется при моделировании процесса токарной обработки:

$$x = a_1 a_2^{u_1} u_2^{-u_1} + a_3 u_3 + a_4 \lg (u_4 + a_5), \qquad (11.1)$$

где x — выход процесса, u_i — входы с ограничениями, а a_j — параметры, которые необходимо идентифицировать. Частное дифференцирование x по u_i (см. разд. 5.6) и методы линеаризации не всегда применимы для идентификации a_j, особенно когда некоторые входы не могут поддерживаться постоянными. Эвристический метод идентификации может привести к неоднозначным результатам. Однако если диапазон идентифицируемых значений, к которому принадлежит a_j, известен, то можно, как правило, получить однозначные результаты.

Рассмотрим два основных эвристических метода идентификации, а именно метод случайного поиска и метод прямого (градиентного) поиска, в котором используется эвристическое отображение градиента. Хотя существует много вариантов этих методов, представленный ниже обзор имеет своей целью разъяснить

---

[1] Такие методы в отечественной литературе называются «поисковыми». — *Прим. ред.*

суть эвристической идентификации с тем, чтобы читатель смог разработать или применить другие эвристические варианты. Отметим, что для эвристической идентификации требуется построение моделей, параметры которых необходимо определять в итерационной процедуре. При идентификации динамических систем в процессе итерации определенного параметра на выход модели влияют обусловленные изменениями параметров переходные процессы, которые необходимо учитывать. Следовательно, когда для идентификации динамических систем используются обобщенные эвристические методы поиска, описанные в соответствующей литературе (см., например, [1, 2]), необходимо уделить особое внимание указанным выше переходным процессам, поскольку они не учитываются в процедуре эвристического поиска статических параметров.

Благодаря своей упрощенной схеме эвристические процедуры идентификации могут весьма долго сходиться к истинным значениям параметров. Часто эти процедуры можно ускорить, если включить их в систему управления с прогнозом, подобную той, которая была рассмотрена в гл. 10 и будет еще рассматриваться в разд. 11.3 данной главы. В этом случае влияние переходных процессов на предыдущих итерациях адекватно учитывается в прогнозе, так что время, в течение которого переходные процессы успокаиваются, можно не принимать в расчет. Таким образом, разность между прогнозируемым и фактическим выходами зависит только от последних значений оцениваемых параметров, и можно учесть изменение параметров, которое оказывается слишком быстрым для других эвристических методов. Задачу, связанную с временем затухания переходных процессов, удается разрешить соответствующим изменением начальных условий, однако во многих случаях идентификации в реальном времени это практически неприменимо.

Эвристические методы, основанные на процедурах случайного или прямого поиска, можно объединить. Эти методы могут быть использованы также на заключительной стадии идентификации в многоиерархическом универсальном идентификаторе, в котором идентификация на низких уровнях начинается процедурами более высокого быстродействия.

11.1. Процедура случайного поиска для идентификации динамических систем

Рассмотрим динамический процесс, заданный в дискретной форме уравнением

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{f}[\mathbf{P},\ \mathbf{u}(k),\quad \mathbf{x}(k),\ k], \tag{11.2}$$

где k — число, обозначающее номер шага; $\mathbf{x}$ — вектор состояния или выхода; $\mathbf{u}$ — вектор входа, $\mathbf{P}$ — вектор параметров. Кроме

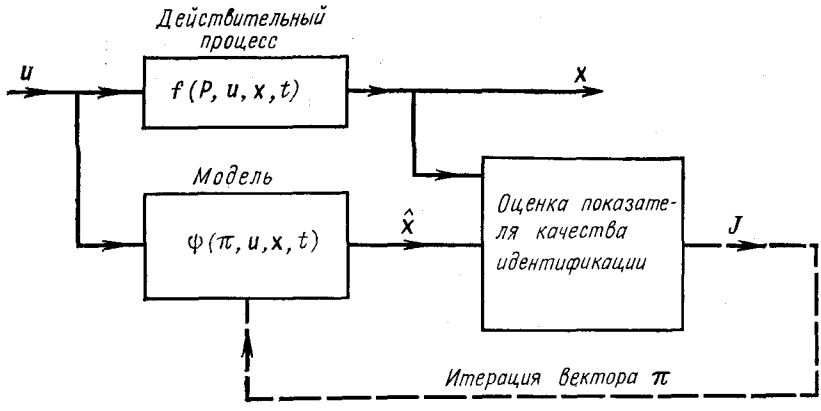


Рис. 11.1. Общая схема идентификатора.

того, включим в рассмотрение вектор оцениваемых параметров $\boldsymbol{\pi}$, компоненты которого образуют модель системы для целей идентификации, как показано на рис. 11.1. Эта модель описывается следующим разностным выражением:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{\pi},\ \mathbf{u}(k),\ \mathbf{x}(k),\ k], \tag{11.3}$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ — оценка вектора $\mathbf{x}$ при использовании модели $\boldsymbol{\psi}$ с вектором оцениваемых параметров $\boldsymbol{\pi}$. Вид функции $\boldsymbol{\psi}$ должен быть задан, а компоненты вектора параметров $\boldsymbol{\pi}$ не известны. Функция $\boldsymbol{\psi}$ не обязательно должна быть идентична истинной (не всегда известной) функции f, которая описывает действительную систему. Более того, вектор $\boldsymbol{\pi}$ не обязательно должен иметь такую же размерность, как $\mathbf{P}$. Предполагается, однако, что вектор $\boldsymbol{\pi}$ принадлежит к ограниченному пространству $\boldsymbol{\Omega}$, т. е.

$$\boldsymbol{\pi} \in \boldsymbol{\Omega}, \tag{11.4}$$

причем границы $\boldsymbol{\Omega}$ априорно заданы и определяют пространство, внутри которого может осуществляться поиск вектора $\boldsymbol{\pi}$.

Для организации процедуры поиска должен быть сформулирован показатель качества идентификации $J(v)$, такой, чтобы $J(v)$ был измеряемой скалярной функцией $\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{x}}$:

$$J(v) \triangleq \sum_{k=1}^{m} [(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k))^T (\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k))], \tag{11.5}$$

где v обозначает v-ю итерацию $\boldsymbol{\pi}$.

Учитывая обозначения и соотношения в уравнениях (11.2)—(11.5), организуем процедуру случайного поиска следующим образом. Сначала одновременно генерируются μ моделей, соответ-

ствующих уравнению (11.4), таким образом, чтобы компоненты их соответствующих векторов параметров π $(1, m)$ при $m=1,\ldots, \mu$ (при их случайном выборе) находились внутри Ω, и оцениваются соответствующие показатели качества идентификации $J(1, m)$ для каждой такой модели. Отметим, что π $(1, m)$, $J(1, m)$ относятся к m-й модели первой генерации. Если предположить, что вектор π может принимать только дискретные положения в пространстве Ω и принадлежать только к одной из r (скажем, 1000) ячеек, на которые пространство Ω разделено, то показатель качества J определяется для каждой ячейки, т. е. для каждого возможного положения π. Вероятность того, что случайно выбранный вектор π будет соответствовать ячейке, относящейся к $r/100$ ячейкам, имеющим наилучшие характеристики, равна 0,01. Следовательно, вероятность того, что вектор π не будет находиться ни в одной из $r/100$ ячеек с наилучшими показателями качества, определяется как $1-0{,}01=0{,}99$. Соответственно, когда случайно выбираются μ различных векторов π, вероятность того, что ни один из них не будет внутри $r/100$ ячеек с наилучшими показателями, равна $1-0{,}99^{\mu}$, $\forall r \gg \mu$. (Если $\mu=228$, то эта вероятность составляет 90%.) Для случаев $r>\mu$ см. задачу 3 в этой главе и ее решение в приложении 4.

Приведенный выше краткий анализ показывает, что число одновременных вычислений, которые необходимо выполнить для идентификации, весьма значительно, если анализируется разделение пространства Ω на очень мелкие ячейки. Весьма важно вычислить оценки $\hat{\mathbf{x}}$ для различных π (h, m) при $m=1, 2,\ldots, \mu$, $h=1, 2,\ldots$ одновременно, так как в противном случае необходимо часто изменять начальные условия или вводить паузу между итерациями π для устранения влияния переходных процессов на $\hat{\mathbf{x}}$ из-за изменения π. После изменения начальных условий можно рассмотреть другое множество μ моделей (обозначаемое через h со следующим по порядку индексом), например относительно наилучшего вектора π из предыдущей генерации. Необходимо заметить, что в этом случае вследствие нестационарности компонентов вектора $\mathbf{P}$ адекватная идентификация может быть не достигнута.

Низкая сходимость и значительный объем вычислений при идентификации динамических процессов методом случайного поиска ограничивают применение этого метода главным образом процессами, в которых разрывы функции $\mathbf{f}$ в уравнении (11.2) исключают использование градиентных или аналитических методов. В случаях многомодальности показателя качества идентификации (т. е. когда показатель J имеет несколько минимумов в пространстве J по π) метод случайного поиска можно вклю-

чить в процедуру идентификации по методу прямого поиска для того, чтобы определить наилучший минимум.

Необходимость в параллельных вычислениях оценки $\hat{\mathbf{x}}$ для различных векторов $\boldsymbol{\pi}$ при одних и тех же входных данных можно исключить, если ввести процедуру случайного поиска в управление с прогнозом, как будет далее показано в разд. 11.3. При таком подходе вектор $\boldsymbol{\pi}$ можно итерировать последовательно с одной итерацией на каждом шаге управления. Если рассматриваются одновременно несколько моделей, то можно использовать на каждом шаге управления несколько итераций одновременно для того, чтобы увеличить скорость сходимости.

11.1.1. Сходимость процедуры случайного поиска

Сходимость процедуры случайного поиска можно доказать при помощи схемы анализа, рассмотренной в работе [3]. Обозначим через $\boldsymbol{\pi}(k)$ вектор случайных параметров, выбранных на k-м интервале, а через $J(k)$ — соответствующий показатель качества. Пусть также $\mathbf{v}(k)$ — случайно выбранное возмущение в $\boldsymbol{\pi}(k)$, а $\boldsymbol{\pi}^*$ — вектор, удовлетворяющий неравенству

$$J(\boldsymbol{\pi}^*) \leqslant J(\boldsymbol{\pi}), \quad \forall \boldsymbol{\pi} \in \Omega. \tag{11.6}$$

Определим вспомогательный скаляр $\xi(k)$:

$$\xi(k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad J[\boldsymbol{\pi}(k) + \mathbf{v}(k)] < J[\boldsymbol{\pi}(k)] - \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad J[\boldsymbol{\pi}(k) + \mathbf{v}(k)] \geqslant J(\boldsymbol{\pi}(k)] - \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon > 0 \tag{11.7}$$

и

$$\boldsymbol{\pi}(k+1) = \begin{cases} \boldsymbol{\pi}(k) & \text{при} \quad \xi = 0, \\ \boldsymbol{\pi}(k) + \mathbf{v}(k) & \text{при} \quad \xi = 1. \end{cases} \tag{11.8}$$

В работе [3] доказано, что последовательность $\boldsymbol{\pi}(1)$, $\boldsymbol{\pi}(2)$, ..., полученная выше, сходится, поскольку для каждого $\delta > 0$ можно найти N, при котором $\|\boldsymbol{\pi}^* - \boldsymbol{\pi}(N)\| \leqslant \delta$, если положить

$$J(\boldsymbol{\pi}) = C, \tag{11.9}$$

где скаляр C обозначает диапазон $G(C)$, в котором все $\boldsymbol{\pi}$ удовлетворяют неравенству

$$J(\boldsymbol{\pi}) < C, \tag{11.10}$$

как показано на рис. 11.2.

Для доказательства обозначим через $\rho(\boldsymbol{\omega})$ функцию плотности вероятности случайного вектора $\mathbf{v}$ в уравнении (11.7). Тогда вероятность выбора вектора $\mathbf{v}$, при котором вектор $\boldsymbol{\pi}$ находится внутри области G, определяется выражением (рис. 11.2)

$$\Phi_{C-\varepsilon} = \int_{G(C-\varepsilon)} \rho(\boldsymbol{\pi} + \mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \tag{11.11}$$

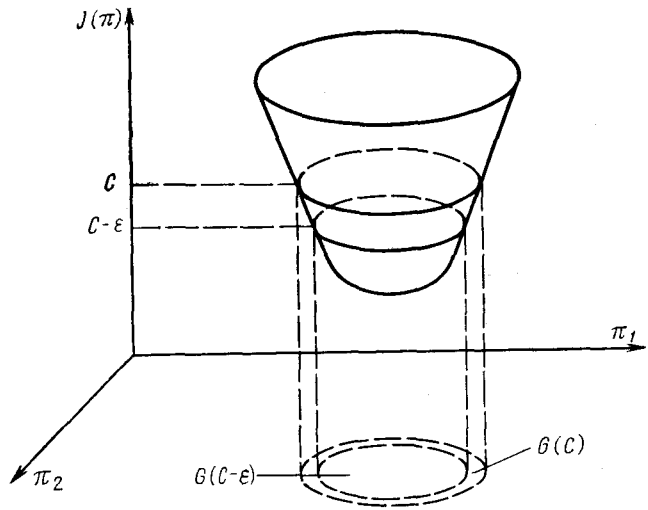


Рис. 11.2. Поверхность затрат в процедуре случайного поиска.

Вероятность того, что $\boldsymbol{\pi}(k)$ при k-й попытке *не* будет находиться на расстоянии δ от $\boldsymbol{\pi}^*$, определяется из выражения

$$p\{\|\boldsymbol{\pi}(k)-\boldsymbol{\pi}^*\|>\delta\}=p\{\boldsymbol{\pi}(k)\notin\delta(\boldsymbol{\pi}^*)\}, \tag{11.12}$$

где соотношение

$$\delta(\boldsymbol{\pi}^*)=\{\boldsymbol{\pi}:\|\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{\pi}^*\|<\delta\} \tag{11.13}$$

означает, что вектор $\boldsymbol{\pi}$ находится на расстоянии δ от $\boldsymbol{\pi}^*$.

Для обеспечения сходимости требуется

$$\lim_{k\to\infty} p[\boldsymbol{\pi}(k)\notin\delta(\boldsymbol{\pi}^*)]\to 0. \tag{11.14}$$

Заметим, однако, что

$$J(\boldsymbol{\pi})-\varepsilon>J(\boldsymbol{\pi}^*) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\pi}\notin\delta(\boldsymbol{\pi}^*), \tag{11.15а}$$

$$J(\boldsymbol{\pi})-\varepsilon\leqslant J(\boldsymbol{\pi}^*) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\pi}\in\delta(\boldsymbol{\pi}^*). \tag{11.15б}$$

Если в процессе поиска получаем m успешных попыток (в пределах δ), то в соответствии с уравнением (11.8) все $\boldsymbol{\pi}\in\delta$ Следовательно, вероятность $\boldsymbol{\pi}(k)\notin\delta(\boldsymbol{\pi}^*)$ меньше или равна вероятности того, что число успешных попыток не больше m, причем первый случай включается во второй, т. е.

$$p\{\boldsymbol{\pi}(k)\notin\delta(\boldsymbol{\pi}^*)\}\leqslant p\left\{\sum_{i=1}^{k}\xi(i)\leqslant m\right\}. \tag{11.16}$$

Таким образом, если

$$p(\pi \in \delta) \geqslant \alpha, \tag{11.17}$$

то из биномиального разложения $p(\Sigma\xi)$ получим

$$p\left\{\sum_{i=1}^{k} \xi(i) \leqslant m\right\} \leqslant \sum_{i=0}^{m} \binom{k}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{k-i}. \tag{11.18}$$

Полагая (пессимистически), что $k > 2m$ и $\alpha < 0{,}5$, получим далее

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{k}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{k-i} < (m+1)\binom{k}{m}(1-\alpha)^k \tag{11.19}$$

и

$$(m+1)\binom{k}{m}(1-\alpha)^k = \frac{m+1}{m!}[k(k-1)\ldots(k-m+1)](1-\alpha)^k < \frac{m+1}{m!} k^m (1-\alpha)^k. \tag{11.20}$$

Подставляя разложение (11.20) в (11.16), имеем

$$p\{\pi(k) \notin \delta\} = p\{\| \pi(k) - \pi^* \| > \delta\} < \frac{m+1}{m!} k^m (1-\alpha)^k. \tag{11.21}$$

Наконец, в пределе получим

$$\lim_{k \to \infty} k^m (1-\alpha)^k \to 0. \tag{11.22}$$

и, следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} p\{\| \pi(k) - \pi^* \| > \delta\} \to 0. \tag{11.23}$$

Пример 11.1

Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$y = ax + bu,$$

для которой известно, что a находится в диапазоне от —1 до —3, а b — в диапазоне от 0,5 до 2,5. Имеются следующие данные о u, x, y:

k	1	2	3	4
u	—0,5	1,2	—0,8	—4,3
x	2,6	6,8	2,7	1,4
y	4,7	14,8	4,6	—1,5

Разделим диапазоны для a и b на отрезки по 0,2, получая, таким образом, 100 ячеек в пространстве Ω. Выберем последовательно следующие три группы случайных величин для $\hat{a}$, $\hat{b}$:

$$\hat{a}_{11} = -2{,}8, \quad \hat{b}_{11} = 1{,}7,$$

$$\hat{a}_{12} = -1{,}6, \quad \hat{b}_{12} = 1{,}5,$$

$$\hat{a}_{13} = -2{,}6, \quad \hat{b}_{13} = 2{,}1$$

и вычислим $\sum_{k=1}^{4} (y(k) - \hat{y}_i(k))^2$, где

$$\hat{y}_j(k) = a_{ij}\, x(k) + b_{ij}\, u(k).$$

В результате получим

$$J_1 = (4{,}7 - (-2{,}8 \cdot 2{,}6 - 1{,}7 \cdot 0{,}5))^2 +$$
$$+ (14{,}8 - (-2{,}8 \cdot 6{,}8 + 1{,}7 \cdot 1{,}2))^2 + (4{,}6 - (-2{,}8 \cdot 2{,}7 -$$
$$- 1{,}7 \cdot 0{,}8))^2 + (-1{,}5 - (-2{,}8 \cdot 1{,}4 - 1{,}7 \cdot 4{,}3))^2.$$

Продолжая таким же образом, оценим показатель J при всех трех группах данных в первом опыте, а именно для $\hat{a}_{12}$, $\hat{b}_{12}$ и $\hat{a}_{13}$, $\hat{b}_{13}$, и получим J_2, J_3. Затем для второго опыта, в котором выбираются три группы новых случайных величин $\hat{a}$ и $\hat{b}$, повторяем эту же процедуру с использованием достаточного числа ячеек так, чтобы можно было получить требуемую точность. Процесс идентификации прекращается, когда значение J станет лучше заранее заданной величины $J_{\text{мин}}$ (см. задачу 11.1).

11.2. Идентификация на основе эвристического прямого поиска

Процедуры прямого поиска для идентификации динамических процессов основаны на градиентных методах оптимизации, называемых также методами крутого спуска. Метод прямого поиска, который будет рассмотрен в этом разделе, предполагает использование эвристических отображений области вокруг некоторой интересующей точки в пространстве параметров для определения градиента скалярного показателя качества идентификации J в пространстве скорее экспериментальным, чем аналитическим способом. По существу в настоящем подходе используется концепция статического прямого поиска, в котором отслеживается градиент показателя качества J по вектору параметров π с целью достижения минимума J, как показано на рис. 11.3.

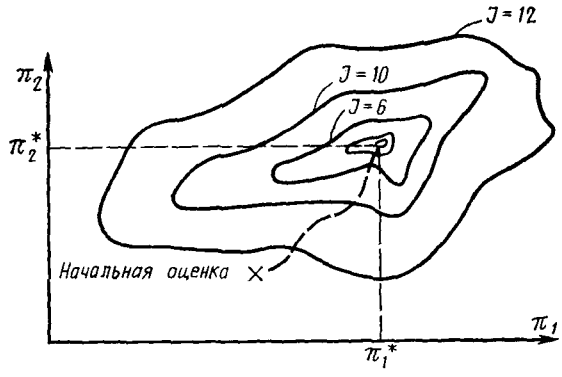


Рис. 11.3. Статический прямой поиск наилучших параметров π_1, π_2.

Многочисленные варианты рассмотренного выше метода статической оптимизации описаны в литературе (см. гл. 5 работы [1]); они в своей основе подобны и обычно могут использоваться для динамической идентификации. Однако важно отметить, что необходим специальный анализ, если для идентификации параметров динамических систем используется какой-либо статический градиентный способ. Применение статического градиентного поиска было описано в разд. 10.2, когда использовался градиентный метод с прогнозом для идентификации функционального приближенного соотношения между векторами входа и состояния и затратами на управление. Поскольку уже был рассмотрен вопрос об идентификации параметров уравнения (11.3), относящихся к модели вход/выход (но *не* к модели качество управления/вход), то рассматриваемый ниже градиентный метод несколько отличается от метода, изложенного в разд. 10.2. Использование данного подхода в регуляторе с прогнозом рассматривается в разд. 11.3. При этом используются параметры из уравнения (11.3), но не учитываются затраты на управление.

Градиентная процедура для идентификации вектора параметров $\boldsymbol{\pi}$ в уравнении (11.3) основана на использовании уравнений (11.2)—(11.4) из предыдущего раздела. В процедуре, таким образом, рассматриваются показатель качества идентификации J [уравнение (11.5)] и обобщенная схема идентификации (рис. 11.1). Если используемой априорной информации недостаточно, то процедура начинается с произвольного выбора вектора параметров $\boldsymbol{\pi}(1,1)$ и одновременного вычисления показателей $J(1,1)$ для $\boldsymbol{\pi}(1,1)$ и $J(1,m)$ для нескольких векторов $\boldsymbol{\pi}(1,m)$, которые случайно или симметрично выбираются вблизи $\boldsymbol{\pi}(1,1)$. Одновременное вычисление показателей $J(1,m)$ для $\boldsymbol{\pi}(1,m)$ вблизи $\boldsymbol{\pi}(1,1)$ необходимо для того, чтобы избежать влияния

переходных процессов одной группы параметров $\boldsymbol{\pi}(1, i)$ на другую $\boldsymbol{\pi}(1, m)$, $\forall\ m$, или для того, чтобы исключить необходимость частого изменения начальных условий. Так как показатели $J(1, m)$ оцениваются при различных m и $\boldsymbol{\pi}$ (1,1) и при одних и тех же входных данных, то можно определить градиент и выбрать следующую группу векторов параметров по полученному градиенту, для того чтобы назначить вектор $\boldsymbol{\pi}$ (2,1) и новые векторы $\boldsymbol{\pi}$ $(2, m)$ относительно первого вектора. Затем заново вычисляют показатели $J(2, m)$ при новых $\boldsymbol{\pi}$ $(2, m)$ и определяют градиенты до тех пор, пока после анализа нескольких дальнейших векторов $\boldsymbol{\pi}$ (h, m) при h=3, 4,... вдоль градиента не будет приближенно определен минимум $J(h, m)$. Переходные процессы из-за ступенчатых изменений от $\boldsymbol{\pi}$ (h, m) до $\boldsymbol{\pi}$ $(h+1, m)$ должны, естественно, заканчиваться перед вычислением $J(h+1, m)$.

Определение градиента по оптимальному направлению, которое выбирается в процедуре поиска, производится путем следующего анализа [2]. Пусть

$$\Delta J = \nabla \mathbf{J}^T \partial \boldsymbol{\pi}, \tag{11.24}$$

где ΔJ — изменение показателя качества вследствие изменения вектора параметров $\partial\,\boldsymbol{\pi}$ (рис. 11.3), которое подчинено ограничению, заданному выражением

$$|\partial \boldsymbol{\pi}|^2 = r^2 = \sum_{j=1}^{n} \partial \pi_j, \tag{11.25}$$

где π_j — j-й компонент n-мерного вектора параметров $\boldsymbol{\pi}$, r — радиус n-мерной гиперсферы относительно заданного $\boldsymbol{\pi}$. Необходимо найти максимально возможное улучшение показателя качества ΔJ при вариациях параметров внутри заданной сферы r. В связи с этим определим лагранжиан таким образом:

$$\mathbf{L} \stackrel{\Delta}{=} \nabla \mathbf{J}^T \partial \boldsymbol{\pi} - \lambda (|\partial \boldsymbol{\pi}|^2 - r^2), \tag{11.26}$$

где λ — множитель Лагранжа. Вариация $\partial\boldsymbol{\pi}^*$ для обеспечения максимума ΔJ [4] удовлетворяет, по аналогии с анализом уравнений (10.38)—(10.47), условию

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \mathbf{0}. \tag{11.27}$$

При этом получаем

$$\nabla \mathbf{J} - 2\lambda \partial \boldsymbol{\pi}^* = 0, \tag{11.28}$$

и, так как λ — постоянный скаляр,

$$\partial \boldsymbol{\pi}^* = (2\lambda)^{-1} \nabla \mathbf{J}. \tag{11.29}$$

Подстановка выражения для $\partial\boldsymbol{\pi}^*$ в уравнение (11.25) дает

$$(2\lambda)^{-2}|\nabla \mathbf{J}|^2 = r^2 \tag{11.30}$$

и

$$\lambda = (\pm)\frac{|\nabla \mathbf{J}|}{2r}. \tag{11.31}$$

Подставляя последнее выражение для λ в уравнение (11.29), получим

$$\partial\boldsymbol{\pi}^* = -\frac{r}{|\nabla \mathbf{J}|}\nabla \mathbf{J}, \tag{11.32}$$

где $\partial\boldsymbol{\pi}^*$ — вектор в направлении, противоположном градиенту $\nabla \mathbf{J}$, как это следует из рис. 11.3.

Так как каждому шагу поиска предшествует отображение показателя качества в пространстве параметров, эвристическая градиентная процедура должна сходиться к окрестности истинного минимума, когда изменяется знак градиента (см. рис. 11.3). На шаге итерации, при котором происходит такое изменение знака, можно соответствующим образом уменьшить величину вариаций в векторе $\boldsymbol{\pi}$, чтобы улучшить отображение и, следовательно, точнее приблизиться к истинному минимуму.

11.2.1. Поиск в случаях кратной модальности

В тех случаях, когда предполагается наличие нескольких минимумов J в пространстве J по $\boldsymbol{\pi}$ (рис. 11.2), процедуры случайного и градиентного (прямого) поиска можно объединить. В этом случае подпрограмма случайного поиска будет определять несколько возможных областей минимума для последующего детального градиентного поиска наилучшего вектора $\boldsymbol{\pi}$. При этом также необходимо учитывать влияние переходных процессов на итерационную процедуру поиска $\boldsymbol{\pi}$. Это может привести к необходимости оценивать процедуру идентификации при одних и тех же входных-выходных данных по всему пространству поиска, что требует чрезмерно большого объема памяти.

11.3. Использование процедуры эвристической идентификации для схем с прогнозом

Можно значительно ускорить процедуру эвристической индентификации, если включить такую процедуру в схему управления с прогнозом, как это обсуждалось выше, в гл. 10. В этом случае рассматривается система, в которой входные управляющие воздействия подаются в дискретные моменты времени 0, T, $2T$, ..., $(k-1)T$, kT. Параметры вектора управления $\mathbf{u}$ изменяют-

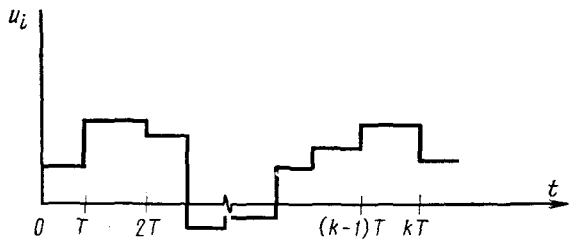


Рис. 11.4. Кусочно-ступенчатое изменение входного управляющего воздействия.

ся кусочно-ступенчатым образом на каждом интервале управления, как показано на рис. 11.4. Для процедуры идентификации необходимо, чтобы поведение $\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}$ в уравнениях (11.2), (11.3) на интервале от kT до $kT+T$ прогнозировалось адекватно в соответствии с имеющимися данными вплоть до момента $t=kT$ в предположении, по аналогии с гл. 10, что

$$\mathbf{u}(kT+\tau)=\mathbf{u}(kT), \quad \forall 0\leqslant\tau<T. \tag{11.33}$$

Следовательно, влияние переходных процессов на итерационную процедуру поиска $\boldsymbol{\pi}$ до момента $t=kT-T$ должно быть учтено в прогнозе. Итерационное изменение $\boldsymbol{\pi}(jT-T)$ на величину $\Delta\boldsymbol{\pi}(jT)$ при $t=jT$,

$$\boldsymbol{\pi}(jT)\overset{\Delta}{=}\boldsymbol{\pi}(jT-T)+\Delta\boldsymbol{\pi}(jT), \tag{11.34}$$

соответственно дает отклонение $\hat{x}(jT+\tau)$, $\forall\ 0\leqslant\tau<T$, от ранее вычисленной величины на $\Delta\hat{x}(jT+\tau)$. Таким образом, в процедуре идентификации прямого или случайного поиска вектор $\boldsymbol{\pi}$ изменяется на каждом интервале управления в соответствии с принципами поиска. Для процедуры случайного или прямого поиска необходимо оценивать показатель качества идентификации J_k, где

$$J_k=\int_{kT}^{kT+T}[(\Delta\mathbf{x}(\tau)-\Delta\hat{\mathbf{x}}(\tau))^T(\Delta\mathbf{x}(\tau)-\Delta\hat{\mathbf{x}}(\tau))]\,d\tau \tag{11.35}$$

на каждом интервале управления. Отметим, что приращение $\Delta\mathbf{x}(\tau)$ измеряется в соответствии с разностью между вектором $\mathbf{x}(kT+\tau)$, $\forall 0\leqslant\tau<T$, который прогнозируется в предположении $\Delta\mathbf{u}(kT)=0$, и фактическим вектором $\mathbf{x}(kT+\tau)$. Аналогично $\Delta\hat{\mathbf{x}}(kT+\tau)$ задается как разность между вектором $\mathbf{x}_{p0}(kT+\tau)$, который прогнозируется в предположении, что $\Delta\mathbf{u}(kT)$ и $\Delta\boldsymbol{\pi}(kT)$ равны нулю, и фактическим выходом $\hat{\mathbf{x}}$ модели уравнения (11.3),

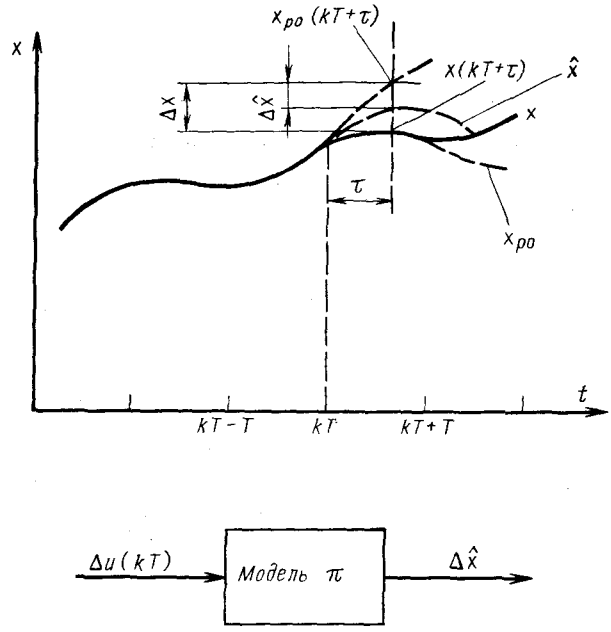


Рис. 11.5. Определение $\Delta\hat{x}(kt+\tau)$.

как показано на рис. 11.5. Последняя модель имеет вектор входа, равный 0, до момента $t=kT$ и $\Delta\mathbf{u}(kT)$ с момента kT, тогда как параметры модели $\boldsymbol{\pi}(kT)$, $\Delta\mathbf{u}(kT)$ и $\boldsymbol{\pi}(kT)$ обновляются на каждом интервале.

Так как вектор $\Delta\mathbf{u}(kT)$ поступает на вход модели с векторами параметров $\boldsymbol{\pi}(kT)$ и поскольку приращение $\Delta\hat{x}(kT+\tau)$, $\forall\, 0\leqslant\tau<T$, обусловлено только вектором $\Delta\mathbf{u}(kT)$, никакие переходные процессы вследствие изменения векторов параметров $\boldsymbol{\pi}(jT)$, $\forall\ j<k$, не будут влиять на величину J_k в уравнении (11.35). Следовательно, нет необходимости ожидать окончания этих переходных процессов или изменять начальные условия перед итерацией $\boldsymbol{\pi}$. Более того, если величины, которые дают наилучшее значение J_k, запоминаются, то можно выполнить эвристическую идентификацию путем достаточно быстрых последовательных итераций. Параметры вектора $\boldsymbol{\pi}$ в модели уравнения (11.3), таким образом, идентифицируются при любых априорно заданных видах функции $\boldsymbol{\psi}$ в отличие от подхода гл. 10, в котором идентифицируется только соотношение между затратами на управление и векторами состояния и управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilde D. J., Optimum Seeking Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J,. 1964.
2. Wilde D. J., Beightler C. S.. Foundations of Optimization, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.
3. Matyas J., Random Optimization, *Automation and Remote Control*, **26**, No. 2 (1965).
4. Elgerd O. I., Control Systems Theory, McGraw-Hill, New York, 1967.

Задачи

1. Вычислите число ячеек, которые необходимо просмотреть, если предполагается существование наилучшей ячейки (с вероятностью 98%) в числе 10% ячеек с лучшими характеристиками при большом числе ячеек.

2. Примените метод случайного поиска для идентификации параметра a в уравнении $\dot{x}=ax^2$ на основе данных задачи 5 в гл. 9 при условии, что a находится в диапазоне от $-0{,}4$ до $-2{,}4$ и этот диапазон разбит на интервалы 0,01. Необходимо найти одну из десяти верхних ячеек с вероятностью 0,97%.

3. Производятся μ различных одновременных опытов над сеткой из r ячеек (r не $\gg\mu$). Определите вероятность $p(\mu)$, с которой достигается по крайней мере одна из w ячеек с наилучшими характеристиками.

4. Идентифицируйте параметры процесса $y=ax^b+u$ методом градиентного поиска по следующим данным [$x(t)$ задано с интервалом $t=0{,}1$, начиная с $t=0$]:

$x(t) =$ 0,0, 0,099, 0,192, 0,276, 0,346, 0,404, 0,449, 0,483, 0,509, 0,528, 0,542, 0,552, 0,56, 0,565, 0,568, 0,571, 0,573, 0,5742, 0,5751, 0,5758, 0,5762, 0,5766, 0,5768, 0,577, 0,5771, 0,57715, 0,57721, 0,57725.

Управление $u(t)$ равно 1,0 $\forall\, t\geqslant 0$ и 0 $\forall\, t<0$. Начинайте с $\hat{a}(0)=-2$, $\hat{b}(0)=0{,}5$.

5. Промоделируйте систему $x(k+1)=ax^2(k)+bx(k)$ при $a=-0{,}02$, $b=1$, $x(0)=1$ и идентифицируйте параметры a, b, используя метод, описанный в разд. 11.3. Рассмотрите $u(k)$ как случайную последовательность, задаваемую путем повторения последовательности: 0,01, 0,13, 0,69, 0,97, 0,09, 0,17, 0,21, 0,73, 0,49, 0,37, 0,81, 0,53, 0,89, 0,57, 0,41, 0,33, 0,29, 0,77.

12

Методы идентификации параметров предсказателя

Поскольку методы идентификации, рассмотренные в этой книге, основываются на результатах измерений и так как для некоторых из этих методов (гл. 10) необходимо прогнозирование, приобретают особое значение задачи сглаживания данных и прогнозирования. Для адекватного прогнозирования нужно тщательно выбрать соответствующие параметры предсказателя. Как следствие возникает задача идентификации этих параметров, которая и является предметом исследования в настоящей главе.

При разработке моделей предсказателя можно рассматривать различные методы описания сигналов. Обычно в этих методах используется оператор входа/выхода, в котором сигнал является выходом, а некоторая последовательность белого шума (при отсутствии какого-либо специального входного воздействия) — входом. Параметры предсказателя, которые необходимо идентифицировать, могут, таким образом, представлять собой авто- и взаимные корреляционные функции сигнала, который необходимо прогнозировать, либо вход в модели входа/выхода, как в методе фильтра Винера [1, 2]. С другой стороны, они также могут быть параметрами уравнений состояния, как в методе конечномерного фильтра Калмана [3] или в описании с помощью передаточных функций с конечным числом элементов, как рассмотрено в работе [4].

Задачи прогнозирования, обсуждаемые в настоящей главе, основаны на двух последних описаниях, а именно на аппарате дискретных передаточных функций, как в работе [4], и методе пространства состояний, как в фильтре Калмана [3]. Как было сказано выше, для этих и всех других методов прогнозирования требуется адекватная идентификация параметров предсказателя. Хотя в первоначальной схеме калмановской фильтрации предполагается, что параметры фильтра заданы, фильтр Калмана можно модифицировать так, что он становится пригоден для оценивания собственных параметров, как показано в разд. 12.4. Эта модификация будет распространена на задачи идентификации процессов общего типа, а также на случай совместного оце-

нивания состояния и параметров. Процедуры оценивания состояния и параметров в расширенном фильтре Калмана, как и процедуры совместного оценивания, основанные на методе инвариантного погружения (гл. 9), могут быть применены к линейным системам с гауссовскими шумами. При этом калмановские процедуры обычно имеют более высокую сходимость, чем процедуры инвариантного погружения. В случае нелинейных систем метод инвариантного погружения имеет преимущества, так как он непосредственно применим к таким системам, в то время как для расширенного фильтра Калмана необходима линеаризация нелинейностей. Однако постановка задачи в форме дискретной передаточной функции обычно более эффективна для целей идентификации параметров предсказателя. Кроме того, ее можно преобразовать в форму метода пространства состояний, как в разд. 2.5.

Методы, изложенные в данной главе применительно к моделям предсказателя, можно преобразовать так, чтобы их можно было использовать для идентификации параметров фильтра, если требуется фильтрация внутри диапазона данных. Эти методы можно дополнить некоторыми процедурами преобразования, что позволит обеспечить оптимальное предсказание некоторых негауссовских последовательностей.

12.1. Сглаживание априорно неизвестных последовательностей с помощью полиномиальной аппроксимации

Обзор методов сглаживания априорно неизвестных последовательностей не является целью данного раздела книги, так как для этого мало одного раздела или даже главы. Поэтому мы лишь кратко рассмотрим задачу сглаживания, чтобы понять ее суть и наметить общие подходы к ее решению. Затем детально опишем процедуру сглаживания, которая одинаково удовлетворительна и удобна для использования в схемах управления и идентификации в реальном масштабе времени.

Рассмотрим измеряемые временны́е последовательности $y(t)$, поведение которых априорно неизвестно и которые могут содержать шум с неизвестными параметрами:

$$y(t) = s(t) + n(t). \tag{12.1}$$

Задача сглаживания состоит в получении сигнала $s(t)$ по измерениям $y(t)$ или по крайней мере в получении удовлетворительной оценки $s(t)$. В фильтре Винера [1, 2] для получения оптимальной оценки $s(t)$ необходимы автокорреляционная функ-

ция сигнала $\varphi_{ss}(\tau)$ и взаимная корреляционная функция сигнала и шума $\varphi_{ns}(\tau)$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{ss}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T s(t)\,s(t-\tau)\,dt, && (12.2а)\\ \varphi_{ns}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T n(t)\,s(t-\tau)\,dt, && (12.2б) \end{aligned}\right\} \quad s(t<0)=0.$$

В случае оптимального фильтра $s(t)$ имеет гауссовское, а точнее, совместное гауссовское распределение. В фильтре Калмана [3] рассматривается вектор состояния $\mathbf{s}(t)$ сигнала, такой, что

$$\mathbf{s}(t+\tau)=\mathbf{A}(t)\,\mathbf{s}(t)+\mathbf{u}(t) \quad \text{при} \quad \tau\geqslant 0, \qquad (12.3)$$

где $\mathbf{u}$ — белый шум, а уравнение для вектора измерений [соответствующее уравнению (12.1)] принимает вид

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{M}(t)\,\mathbf{s}(t)+\mathbf{n}(t), \qquad (12.4)$$

где $\mathbf{M}$ — матрица измерений, а $\mathbf{n}$ — вектор ошибок в виде белого шума.

Таким образом, для оптимальной оценки по методу фильтра Калмана требуется знание матриц $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{W}(t)$ и $\mathbf{S}(t_0)$, где $\mathbf{A}(t)$ — переходная матрица состояния в уравнении (12.3) и

$$\mathbf{W}(t)\stackrel{\Delta}{=}E[\mathbf{u}(t)\,\mathbf{u}^T(t)], \quad E[\mathbf{u}(t)]=0, \qquad (12.5а)$$

$$\mathbf{N}(t)\stackrel{\Delta}{=}E[\mathbf{n}(t)\,\mathbf{n}^T(t)], \quad E[\mathbf{n}(t)]=0, \quad E[\mathbf{n}(t)\,\mathbf{u}^T(\tau)]=0, \qquad (12.5б)$$

$$\mathbf{S}(t_0)\stackrel{\Delta}{=}E[[\mathbf{s}(t_0)-\mathbf{s}^*(t_0)]\,[\mathbf{s}(t_0)-\mathbf{s}^*(t_0)]^T]. \qquad (12.5в)$$

Здесь E — математическое ожидание, $\mathbf{s}^*$ — априорная средняя оценка $\mathbf{s}_0$, а $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{u}$ — гауссовские векторы. Если φ_{ss}, φ_{ns} в уравнениях (12.2) и $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{W}(t)$, $\mathbf{S}(t_0)$ в уравнениях (12.3) и (12.5) априорно неизвестны, то, очевидно, потребуется их идентификация для получения адекватных оценок $\mathbf{s}(t)$. Для случаев, когда необходимо произвести осреднение (возможно, нестационарного) вектора $\mathbf{s}$ в отсутствие априорной информации, можно построить процедуру относительно быстрого сглаживания в реальном масштабе времени, обеспечивающую полиномиальную аппроксимацию этих средних значений по методу наименьших квадратов. Для такой процедуры следует только задать самый высокий порядок полинома, который необходимо рассмотреть, хотя этот порядок можно назначить по дисперсии ошибки. Если процедура аппроксимации используется для зашумленных измерений или случайно изменяющихся средних

значений, то такую процедуру можно построить заново с использованием уравнений (12.3), (12.4). Это облегчает получение алгоритма коррекции типа фильтра Калмана, который, однако, не является полностью оптимальным, поскольку предположение о гауссовском распределении в этих случаях не выполняется. Схема полиномиальной аппроксимации более подробно обсуждается ниже.

12.1.1. Сглаживание полиномами наилучшего порядка по методу наименьших квадратов

Обозначим через y_i серию $N+1$ измерений ($i=0, 1, 2,..., N$), заданных на интервале от $t—T$ до t, имеющих переменные средние значения

$$y_i = s_i + n_i, \tag{12.6}$$

где s_i — сигнал, n_i — случайный шум с нулевым средним, а y_N — измерение в текущий момент времени. При отсутствии априорной информации можно предположить, что сигнал s_i можно аппроксимировать ортогональным полиномом порядка m, где $m \leqslant m'$ (см. разд. 5.6), и что шум n_i имеет квазистационарный характер на интервале T. Эти допущения, хотя и ограничивающие общность процедуры, можно считать справедливыми для многих практических задач сглаживания и прогнозирования, возникающих в управлении. Выбор ортогональных полиномов основан на результатах разд. 5.6. Ортогональный полином наилучшего порядка $m \leqslant m'$ подгоняется под последнее $N+1$-е измерение y_i, где m получается в соответствии с алгоритмом, описанным в разд. 5.6.1в. Величину m' можно выбирать произвольно, если отсутствует какая-либо априорная информация о сигнале, хотя, очевидно, $m' < N—1$. На практике алгоритм из разд. 5.6.1в достаточно быстро сходится к наилучшей оценке порядка m даже без учета ограничения на m'. Ограничение m' величиной, равной 5, обычно допустимо и в итоге приводит к адекватному прогнозированию, тогда как при полиномах более высокого порядка прогнозирование с большим упреждением по времени осуществить гораздо труднее.

После определения наилучшего порядка m производится аппроксимация измерений полиномом. Учитывая результаты анализа ортогональных полиномов в разд. 5.6.1а, представляется целесообразным выбирать полиномы Чебышева в связи с их хорошими аппроксимационными свойствами. В работе [5] описана АЛГОЛ-программа для получения полиномов Чебышева с помощью метода Грама — Шмидта. При использовании ортогонального полинома, выбранного этим методом, получается сглаженный выход $z(t)$ в виде

$$z(t) = a_0 p_0(t') + \cdots + a_m p_m(t'), \tag{12.7}$$

где z — полиномиальная оценка s m-го порядка в уравнении (12.6), t' — смещенная шкала времени, начинающаяся с нуля в момент первого из $N+1$ измерений, к которым подгоняется полином.

Введя

$$\mathbf{Y}(t) \triangleq [y_0 \ \dots \ y_N]^T, \quad y_j = y(t - j\tau), \tag{12.8}$$

где τ — интервал дискретизации измерений, запишем уравнение (12.7) для $N+1$ измерений:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0(N) \dots p_m(N) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_0(0) \ \dots p_m(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{\Pi a}, \tag{12.9}$$

где $z_j = z(t - j\tau)$. Элементы a_v вектора $\mathbf{a}$, $\forall v \in (0, m)$, выбираются так, чтобы достигал минимума функционал J:

$$J \triangleq \| \mathbf{Y} - \mathbf{z} \|^2 = \| \mathbf{Y} - \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{a} \|^2, \tag{12.10}$$

что дает при минимуме J (наилучшей аппроксимации) по аналогии с уравнением (5.27)

$$\mathbf{a} = [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi}]^{-1} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{Y} \tag{12.11}$$

и

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{\Pi} [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi}]^{-1} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{Y}. \tag{12.12}$$

Поскольку $p_v(t')$ — ортогональные полиномы от t', $z(t)$ можно выразить в виде

$$z(t) = \sum_{j=0}^{m} \eta_j (t')^j, \tag{12.13}$$

где η_j — коэффициенты, зависящие от $(t')^j$.

12.2. Экстраполяция разложением в ряд Тейлора сигналов, аппроксимированных полиномами

После того как z аппроксимируется полиномом в соответствии с уравнением (12.13), для экстраполяции полинома $\overline{z(t)}$ используется следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\hat{z}(t + \theta) = z(t) + \theta \dot{z}(t) + \frac{\theta^2}{2!} \ddot{z}(t) + \dots + \frac{\theta^m}{m!} z^{(m)}(t),$$

$$z^{(j)} \triangleq d^j z / dt^j. \tag{12.14}$$

При этом из уравнения (12.7) получим

$$\overset{(k)}{z} = \sum_{j=k}^{m} a_j \overset{(k)}{p_j}(t). \tag{12.15}$$

Следовательно,

$$\hat{z}(t+\theta) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\theta^k \overset{(k)}{z}(t), \quad \forall\theta \in (0, T), \tag{12.16}$$

или в соответствии с уравнением (12.15)

$$\hat{z}(t+\theta) = \sum_{k=0}^{m} \left\{ \frac{\theta^k}{k!} \sum_{j=k}^{m} [a_j \overset{(k)}{p_j}(t')] \right\}. \tag{12.17}$$

Обозначим теперь

$$\mathbf{F} \triangleq \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & \dot{p}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & \dot{p}_2 & \ddot{p}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ p_m & \dot{p}_m & \ddot{p}_m & \cdots & p_m^{(n)} \end{bmatrix} \tag{12.18}$$

и

$$\boldsymbol{\theta} \triangleq \left[1, \theta, \frac{\theta^2}{2!}, \ldots, \frac{\theta^m}{m!}\right]^T = [\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}]^T. \tag{12.19}$$

Подставляя выражение для a_j из уравнения (12.11), получим

$$z(t+\theta) = (\mathbf{F}\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{a} = [\mathbf{F}\boldsymbol{\theta}]^T (\boldsymbol{\Pi}^T \boldsymbol{\Pi})^{-1} \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{Y}(t). \tag{12.20}$$

Уравнение (12.20) описывает экстраполяцию разложением в ряд Тейлора аппроксимации измерений ортогональными полиномами по методу наименьших квадратов с момента $t=kT-T$ до $t=kT$, записанную в матричной форме. Краткое обозначение матриц принято для удобства записи. Указанная экстраполяция не включает коррекцию прогноза при сравнении данных измерений и прогноза. Такое отсутствие коррекции можно допустить в рассматриваемом случае, когда требуется быстрое прогнозирование и предполагается, что $\mathbf{s}(t)$ не содержит шума. Уравнение (12.20) может служить в качестве модели сигнала, для которой целесообразно использовать метод последовательного прогноза с *линейной обратной связью в тех случаях, когда параметры уравнения состояния* $z(t)$ *не известны априорно*, если описанная выше аппроксимация производится применительно к

последовательности шума или к случайно изменяющимся средним значениям. В этом случае, очевидно, прогнозирование оказывается неоптимальным, так как предположение о гауссовском характере векторов **s**, **n**, **u** не выдерживается.

12.2.1. Представление в пространстве состояний алгоритмов экстраполяции разложением в ряд Тейлора

Алгоритм прогнозирования из разд. 12.1.1 можно улучшить, если использовать в модели экстраполяции последовательную корреляцию типа алгоритма последовательного предсказателя Калмана [3]. Для этого модель экстраполяции (12.20) представляется в форме уравнения состояния, что позволяет получить модель экстраполяции для случаев, когда параметры сигнала априорно неизвестны. Параметры модели в пространстве состояний получаются из уравнений (12.16)—(12.20) при допущениях, принятых в конце разд. 12.1.1. Определим

$$z(t) \overset{\Delta}{=} x_1(t), \tag{12.21}$$

где $x(t)$ имеет такой же смысл, как и в уравнении (12.17), и

$$x_{i+1} \overset{\Delta}{=} \overset{(i)}{x}, \quad \forall i \in (1, m+1), \quad \overset{(i)}{x} = d^i x/dt^i. \tag{12.22}$$

Уравнения (12.21) и (12.22) описывают различные состояния оценки $z(t)$. Если теперь преобразовать уравнение (12.17) для прогноза оценки $z(t+\theta)$, используя обозначения из уравнений (12.21) и (12.22), и добавить член от прогноза ошибки u_1 в разложение Тейлора, то получим

$$x_1(t+\theta) = \sum_{i=0}^{m} \theta_{i+1} \overset{(i)}{x_1}(t) + u_1(t) = \sum_{i=1}^{m+1} \theta_i x_i(t) + u_1(t), \tag{12.23}$$

где θ_i — элементы вектора $\boldsymbol{\theta}$ в уравнении (12.19). В результате можно выразить все $m+1$ состояний прогнозируемой оценки следующим образом:

$$x_j(t+\theta) = \sum_{i=1}^{m+2-j} \theta_i x_{i+1-j}(t) + u_j(t), \quad \forall j (1, m+1), \tag{12.24}$$

где $u_j(t)$ приближенно описывается выражением

$$u_j(t) = x_j(t+\theta) - x_{j,e}(t+\theta), \quad \forall j (1, m+1). \tag{12.25a}$$

Здесь $x_{j,e}(t+\theta)$ обозначает x_j, получаемый в результате аппроксимации полиномом с момента $t-T$ до момента t, а $x_j(t+\theta)$ обозначает x_j, аппроксимирующий данные с момента $t-T+\theta$ до

момента $t+\theta$ (рис. 12.1). Указанный выше член u_j можно принять таким, чтобы удовлетворялось условие

$$E[u_j] = 0. \tag{12.25б}$$

Во многих случаях можно принять, что u_j является гауссовским белым шумом. Тогда u_j можно рассматривать в уравнении (12.24) как входы для фильтра Калмана.

Введем далее дополнительное состояние x_{m+2} для описания ошибки измерений:

$$x_{m+2}(t) \stackrel{\Delta}{=} y(t-\theta) - x_1(t-\theta), \tag{12.26а}$$

где $y(t)$ — измерение, как и выше в уравнении (12.6); тогда

$$x_{m+2}(t+\theta) = u_{m+2}(t), \tag{12.26б}$$

$$E\left[u_{m+2}(t)\right] = E\left[x_{m+2}(t)\right] = 0. \tag{12.26в}$$

Таким образом, уравнения (12.24)—(12.26) описывают модель прогнозируемых оценок в пространстве состояний:

$$\mathbf{X}(t+\theta) = \mathbf{\Phi X}(t) + \mathbf{U}(t), \tag{12.27}$$

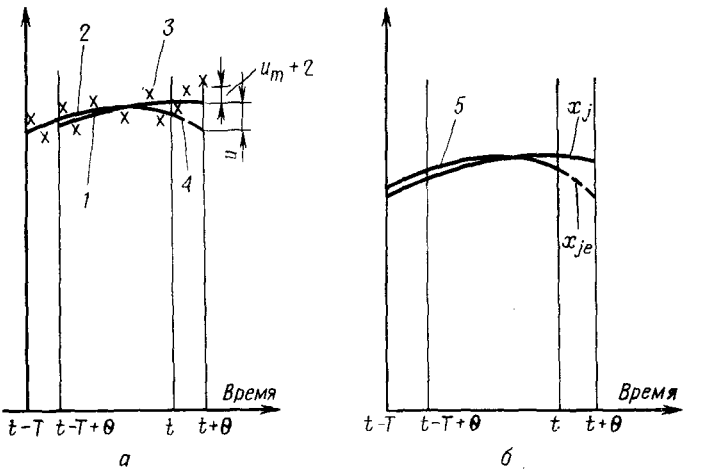


Рис. 12.1. Схема полиномиальной аппроксимации и экстраполяции рядом Тейлора.

а — определение x_1, u_1, u_{m+2}; *б* — определение x_j, u_j.

1 — кривая, аппроксимирующая измерения от $t-T+\theta$ до $t+\theta$; *2* — кривая, аппроксимирующая измерения от $t-T$ до t; *3* — измерения; *4* — экстраполяция аппроксимирующей кривой разложением в ряд Тейлора; *5* — $(j-1)$-я производная кривой, аппроксимирующей данные от $t-T$ до t.

где

$$\Phi \triangleq \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \theta_{m+1} & 0 \\ 0 & \theta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \theta_m & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & \cdots & & \theta_{m-1} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12.28}$$

$$\mathbf{X} \triangleq [x_1, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}]^T, \tag{12.29}$$

$$\mathbf{U} \triangleq [u_1, \ldots, u_{m+1}, u_{m+2}]^T, \tag{12.30}$$

а математическое ожидание $\mathbf{U}$ равно

$$E[\mathbf{U}(t)] = \mathbf{0}. \tag{12.31}$$

При этом матрица ковариаций ошибок $E[\mathbf{U}\mathbf{U}^T]$ определяется соотношением

$$E[\mathbf{U}(t)\,\mathbf{U}^T(\tau)] \triangleq \mathbf{Q}\delta(t-\tau). \tag{12.32}$$

Модель прогноза дополняется уравнением (12.26), в результате чего получаем

$$\mathbf{y}(t) = y(t) = x_1(t) + x_{m+2}(t) = \mathbf{M}\mathbf{X}(t), \tag{12.33}$$

где $\mathbf{M}$ — $(m+2)$-мерный вектор-строка:

$$\mathbf{M} = [1, 0, 0, \ldots, 0, 1], \tag{12.34}$$

а $\mathbf{y}(t)$ имеет единичную размерность. В итоге получаем полную модель в пространстве состояний такого же вида, как в фильтре Калмана, но в которой используется предположение, что текущие измерения аппроксимированы полиномом.

Пример 12.1

Рассмотрим последовательность измерений

t	0,4	0,44	0,48	0,52	0,56	0,6	0,64	0,68	0,72
$y(t)$	0,387	0,415	0,456	0,492	0,528	0,556	0,595	0,630	0,659

где $y(t)=s(t)+n(t)$, а s и n обозначают полезный сигнал и шум с нулевым средним соответственно. Если приближенно описать последние измерения полиномом $z(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, где $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=-0{,}118$, то получим

t	0,4	0,44	0,48	0,52	0,56	0,6	0,64	0,68	0,72
$z(t)$	0,381	0,417	0,453	0,488	0,524	0,558	0,592	0,636	0,659

В результате имеем $\hat{z}(t+\theta)=0{,}692$ при $t=0{,}72$, $\theta=0{,}04$, тогда как измеренная (позднее) величина $y(0{,}76)$ равна 0,688. Уравнение состояния, соответствующее уравнению (12.27), приобретает вид

$$\begin{bmatrix} x_1(t+\theta) \\ x_2(t+\theta) \\ x_3(t+\theta) \\ x_4(t+\theta) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(t+\theta, t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{\Phi}(t+\theta, t) = \begin{bmatrix} 1 & \theta & \frac{\theta^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и $x_1(t)=z(t)$, $x_2(t)=\dot{z}(t)$, $x_3(t)=\ddot{z}(t)$, $x_4 t=y(t)-z(t)$. Предполагая, что полиномиальная аппроксимация кривой $y(t)$ с момента $t=0{,}44$ до $t=0{,}76$, т. е. измерений, включающих $y(0{,}76)$, дает $z(0{,}76)=0{,}0690$, получим

$$u_1(t) \cong 0{,}002 = z(0{,}76) - \hat{z}(0{,}76).$$

Аналогично получим приближенные значения для $u_2(t)$ и $u_3(t)$, а $u_4(t)$ определяется из уравнения (12.26б).

12.3. Использование последовательных коррекций, основанных на методе калмановской фильтрации, в экстраполяции

Используем теперь модель, описываемую уравнениями (12.27), (12.28) и (12.33), для последовательного получения корректируемых с помощью обратной связи оценок $\mathbf{X}^*(t+\theta)$ вектора $\mathbf{X}(t+\theta)$ по данным измерений y до момента t в следующем виде:

$$\mathbf{X}^*(t+\theta|t) = \mathbf{\Phi X}^*(t|t-\theta) + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{y}}(t|t-\theta). \tag{12.35}$$

Здесь $\mathbf{X}(t_\mu|t_\nu)$ — вектор $\mathbf{X}$, оцениваемый в момент t_μ на основе измерений до момента t_ν, $\mathbf{D}$ — матрица обратной связи

$$\mathbf{D} \triangleq [d_1 \cdots d_{m+2}]^T, \tag{12.36}$$

а $\tilde{\mathbf{y}}(t|t-\theta)$ определяется соотношениями

$$\tilde{\mathbf{y}}(t|t-\theta) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t|t-\theta), \tag{12.37}$$

$$\mathbf{y}^*(t|t-\theta) \triangleq \mathbf{MX}^*(t|t-\theta). \tag{12.38}$$

Из уравнений (12.37) и (12.38) следует

$$\tilde{\mathbf{y}}(t|t-\theta) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{M}\mathbf{X}^*(t|t-\theta) = \\ = y(t) - x_1^*(t|t-\theta) - x_{m+2}^*(t|t-\theta). \quad (12.39)$$

Подстановка выражения для $\tilde{\mathbf{y}}$ из уравнения (12.39) в (12.35) дает

$$\mathbf{X}^*(t+\theta|t) = [\mathbf{\Phi} - \mathbf{DM}]\,\mathbf{X}^*(t|t-\theta) + \mathbf{D}\mathbf{y}(t) = \\ = \mathbf{\Phi}^*\,\mathbf{X}^*(t|t-\theta) + \mathbf{D}\mathbf{y}(t), \quad (12.40)$$

где

$$\mathbf{\Phi}^* \triangleq \mathbf{\Phi} - \mathbf{DM} = \begin{bmatrix} [\theta_1 - d_1] & \theta_2 & \theta_3 & \cdots & \theta_{m+1} & -d_1 \\ -d_2 & \theta_1 & \cdots & \cdots & \theta_m & -d_2 \\ -d_3 & 0 & \theta_1 & \cdots & \theta_{m-1} & -d_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -d_{m+1} & 0 & \cdots & \cdots\, 0 & \theta_1 & -d_{m+1} \\ -d_{m+2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -d_{m+2} \end{bmatrix}. \quad (12.41)$$

Матрица обратной связи $\mathbf{D}$ определяется следующим образом [3]. Обозначая

$$\tilde{\mathbf{X}}(t+\theta|t) \triangleq \mathbf{X}(t+\theta) - \mathbf{X}^*(t+\theta|t), \quad (12.42)$$

получим из уравнений (12.35), (12.41)

$$\tilde{\mathbf{X}}(t+\theta|t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}(t) - \mathbf{\Phi}^*\mathbf{X}^*(t|t-\theta) - \mathbf{D}\mathbf{y}(t) = \\ = \mathbf{\Phi}^*\,\mathbf{X}(t) - \mathbf{\Phi}^*\,\mathbf{X}^*(t|t-\theta) + \mathbf{U}(t) = \\ = \mathbf{\Phi}^*\,\tilde{\mathbf{X}}(t|t-\theta) + \mathbf{U}(t). \quad (12.43)$$

Определим далее матрицу ковариаций ошибок состояния $\mathbf{P}$ в виде

$$\mathbf{P}(t+\theta) \triangleq E\,[\tilde{\mathbf{X}}(t+\theta|t)\tilde{\mathbf{X}}^T(t+\theta|t)]. \quad (12.44)$$

Подставляя выражение для $\tilde{\mathbf{X}}(t+\theta|t)$ из уравнения (12.43) и учитывая, что $E(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)=\mathbf{Q}$, согласно уравнению (12.32), получим

$$\mathbf{P}(t+\theta) = \mathbf{\Phi}\mathbf{P}(t)\mathbf{\Phi}^T - \mathbf{D}(t)\,\mathbf{M}\mathbf{P}(t)\,\mathbf{\Phi}^T - \\ - \mathbf{\Phi}\mathbf{P}(t)\,\mathbf{M}^T\mathbf{D}^T(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{M}\mathbf{P}(t)\,\mathbf{M}^T\mathbf{D}^T(t) + \mathbf{Q}(t). \quad (12.45)$$

Так как матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{Q}(t)$ не зависят от $\mathbf{D}(t)$, след матрицы $\mathbf{P}$ представляет собой сумму квадратов ошибок состояния. Тогда наилучшей матрицей обратной связи в данной постановке задачи (оптимальной в случае гауссовских процессов) будет

матрица, которая минимизирует $\mathrm{tr}\,[\mathbf{P}(t+\theta)]$:

$$\frac{\partial \,\mathrm{tr}\,[\mathbf{P}(t+\theta)]}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{0}. \tag{12.46}$$

Используя методы дифференцирования следа матрицы (см. приложение 2), преобразуем матрицу обратной связи, оптимальную для данной постановки задачи:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{\Phi P}(t)\,\mathbf{M}^T\,[\mathbf{M P}(t)\,\mathbf{M}^T]^{-1}. \tag{12.47}$$

Подставляя выражение для матрицы $\mathbf{D}$ в уравнение (12.45), получим

$$\mathbf{P}(t+\theta) = \mathbf{\Phi}^*\,\mathbf{P}(t)\,\mathbf{\Phi}^T + \mathbf{Q}(t). \tag{12.48}$$

Таким образом, схема предсказателя с обратной связью предполагает рекуррентное решение уравнений (12.47) и (12.48) с начальным условием $\mathbf{P}(t_0)$. Матрицу ковариаций ошибок начального состояния $\mathbf{P}(t_0)$ можно получить из осреднения $\tilde{\mathbf{X}}(t_{0i})\,\tilde{\mathbf{X}}(t_{0i})^T$ при различных t_{0i}, причем если прогноз требуется для целей идентификации, как в гл. 10, то t_{0i} обозначает момент приложения вектора управления. Если оценки $\mathbf{X}^*$ с использованием обратной связи отсутствуют, то матрица $\mathbf{P}(t_0)$ может быть принята следующей [см. уравнение (12.44) и рис. 12.1]:

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{Q}(t_0). \tag{12.49}$$

Отметим, что матрицу $\mathbf{Q}(t)$ можно определить в соответствии с уравнениями (12.25а), (12.26) и (12.32).

Схема предсказателя в этом разделе получается из рассмотрения в пространстве состояний экстраполятора на основе ряда Тейлора. Экстраполированные значения рассматриваемой последовательности, записанные через параметры и их начальные оценки, корректируются по методу наименьших квадратов. Такая схема предсказателя имеет преимущества перед экстраполяцией с разложением в ряд Тейлора полиномиальной оценки $x_1(t)$ измерений $y(t)$, поскольку она не требует, чтобы априорная полиномиальная аппроксимация была идентична самому сигналу. В данной схеме аппроксимация рассматривается как начальная оценка, которая затем последовательно корректируется в соответствии с последующими данными. С учетом допущения о том, что сигнал и его производные образуют вектор состояния сигнала в случае, когда шум $\mathbf{u}$ достаточно близок к гауссовскому белому шуму, данная схема дает адекватные оценки при наличии обратной связи (в отсутствие другой априорной информации) для сигналов, описываемых аналитическими функциями. Кроме того, в случаях полного отсутствия априорной информации можно принять матрицу $\mathbf{P}(t_0)$ в виде $a^2\mathbf{I}$, где $a \to \infty$ (по аналогии с матрицей $\mathbf{P}$ в гл. 6). Фактически допустима достаточно

большая величина a, следующая из пессимистического предположения о начальной ошибке оценивания. Подчеркнем еще раз, что данный подход справедлив лишь тогда, когда выполняются указанные выше допущения. Таким образом, если метод калмановской фильтрации не может быть применен, использование рассмотренного подхода все же улучшает экстраполяцию, хотя и не обеспечивает оптимального прогнозирования.

12.4. Определение параметров предсказателя при изменении параметров состояния в фильтре Калмана

Мейн [6] предложил метод, с помощью которого фильтр Калмана [3] можно использовать для оценивания параметров уравнений состояния предсказателя калмановского типа. Оцениватель Мейна по существу является фильтром Калмана, в котором должен оцениваться вектор параметров, а не состояния. Поэтому требуется, чтобы вектор состояния был непосредственно доступен измерению. Когда это невозможно, принимается, что измерение представляет собой вектор состояния сигнала. Если имеется только скалярная последовательность измерений, а априорная информация о векторе состояния сигнала отсутствует, то можно применить метод из разд. 12.3, в котором предполагается, что сглаженные измерения и их производные представляют вектор состояния. В противном случае можно использовать методы из разд. 12.6, для которых не требуются такие предположения.

Для получения оценок по методу Мейна рассмотрим следующее уравнение состояния:

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{\Phi X}(k) + \mathbf{V}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12.50}$$

где $\mathbf{X}$ — $(n\times 1)$-мерный вектор состояния; Φ — $(n\times n)$-мерная переходная матрица (матрица параметров), которая может быть переменной во времени; $\mathbf{V}$ — вектор ошибок в виде белого шума с нулевым средним.

Далее, предположим

$$E\left[\mathbf{V}(k)\,\mathbf{V}^T(k)\right] \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{Q}(k), \tag{12.51}$$

$$\mathbf{Z}(k) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{X}(k+1), \tag{12.52}$$

где $E[...]$ обозначает безусловное математическое ожидание.

Уравнение (12.50) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{M}(k)\,\mathbf{a}(k) + \mathbf{V}(k), \tag{12.53}$$

где

$$\mathbf{M}(k)=\begin{bmatrix}\mathbf{X}^T(k) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \mathbf{X}^T(k) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \mathbf{X}^T(k) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{X}^T(k) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{X}^T(k) & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{12.54}$$

есть $(n\times n^2)$-мерная матрица

$$\mathbf{a}(k)=[\mathbf{\Phi}_1(k),\ \mathbf{\Phi}_2(k),\ \ldots,\ \mathbf{\Phi}_n(k)]^T \tag{12.55}$$

есть $n^2\times 1$-мерный вектор, а $\mathbf{\Phi}_i(k)$ — i-я строка матрицы $\mathbf{\Phi}$.

Предполагая, что матрица $\mathbf{\Phi}$ — постоянная, получим

$$\mathbf{a}(k+1)=\mathbf{a}(k). \tag{12.56}$$

Тогда уравнения (12.53) и (12.56) представляют собой модифицированные уравнения измерений и состояния соответственно по аналогии с уравнениями (12.27) и (12.33), приведенными выше в разд. 12.2.

Определим далее

$$\tilde{\mathbf{a}}(k)\triangleq\mathbf{a}(k)-\mathbf{a}^*(k), \tag{12.57}$$

$$\mathbf{P}(k)\triangleq E[\tilde{\mathbf{a}}(k)\tilde{\mathbf{a}}^T(k)], \tag{12.58}$$

где $\mathbf{a}^*(k)$ — оптимальная оценка $\mathbf{a}(k)$.

Таким образом, задача оценивания по Мейну сводится к получению оценок $\mathbf{a}(k)$ по методу наименьших квадратов, которые минимизируют след матрицы плотности распределения ошибок параметров $\mathbf{P}(k)$ по аналогии с исходной задачей Калмана [3] оценивания $\mathbf{X}(k)$, в которой минимизируется след матрицы плотности ошибок состояний $E[\tilde{\mathbf{X}}(k)\tilde{\mathbf{X}}^T(k)]$. Модель оценивания Мейна состоит из уравнений (12.53) и (12.56), которые аналогичны уравнениям калмановского фильтра, за исключением того, что в них $\mathbf{a}$ и $\mathbf{X}$ меняются ролями. Следовательно, аналогично результатам Калмана [3] здесь нужно использовать матрицу обратной связи, описываемую выражением

$$\mathbf{D}(k)=\mathbf{P}(k)\,\mathbf{M}^T(k)\,[\mathbf{M}(k)\,\mathbf{P}(k)\,\mathbf{M}^T(k)+\mathbf{Q}(k)]^{-1}. \tag{12.59}$$

В результате можно получить оптимальную оценку вектора $\mathbf{a}(k+1)$ и (при заданных других параметрах) определить матрицу $\mathbf{\Phi}$ в уравнении (12.50):

$$\mathbf{a}^*(k+1)=\mathbf{a}^*(k)+\mathbf{D}(k)\,\tilde{\mathbf{Z}}(k), \tag{12.60}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}(k) = \mathbf{Z}(k) - \hat{\mathbf{Z}}(k), \tag{12.61}$$

$$\hat{\mathbf{Z}}(k) = \mathbf{M}(k)\,\mathbf{a}^*(k). \tag{12.62}$$

В фильтре Мейна проводится рекуррентное оценивание матрицы $\mathbf{P}(k+1)$ согласно следующему выражению, которое эквивалентно калмановскому выражению для $E[\tilde{\mathbf{X}}(k+1)\,\tilde{\mathbf{X}}^T(k+1)]$:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k) - \mathbf{P}(k)\,\mathbf{M}^T(k)\,[\tilde{\mathbf{M}}(k)\,\mathbf{P}(k)\,\tilde{\mathbf{M}}^T(k) + \mathbf{Q}(k)]^{-1}\,[\mathbf{P}(k)\,\mathbf{M}^T(k)]^T. \tag{12.63}$$

Для оценивания параметров необходимо решать уравнения (12.59)—(12.63) при $k=0, 1, 2, \ldots$. Полный вывод уравнений (12.59) и (12.63) здесь опускается, так как он подробно рассмотрен в работах [3, 6], а также в связи с тем, что весьма похожий вывод, учитывающий другой характер шумов в уравнениях состояния и измерений, приведен в разд. 12.3.

Для идентификации необходимо знать матрицы $\mathbf{P}(0)$ и $\mathbf{Q}(k)$. При отсутствии другой информации о векторе $\mathbf{a}$ начальные оценки $\mathbf{P}(0)$ можно получить, вычисляя коэффициенты ψ_{ij} следующего уравнения регрессии:

$$X_i(\mu+1\,|\,\mu+1) = \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(\mu)\,X_j(\mu|\mu). \tag{12.64}$$

Здесь $X_i(\mu+1\,|\,\mu+1)$ обозначает величины $x_i(\mu+1)$, полученные на $\mu+1$-м интервале (когда предположение о том, что состояние доступно измерению, является некорректным, можно использовать производные аппроксимируемых величин). Далее предположим, что начальная оценка ожидаемой ошибки по элементам Φ_{ij} матрицы параметров Φ и, следовательно, вектора $\mathbf{a}$ имеет порядок величин ψ_{ij}, в результате чего получим

$$\hat{\mathbf{a}}(0) = \mathbf{0}, \tag{12.65}$$

$$\mathbf{P}'(\mu) = [\boldsymbol{\psi}_1(\mu)\cdots\boldsymbol{\psi}_m(\mu)]\,[\boldsymbol{\psi}_1(\mu)\cdots\boldsymbol{\psi}_m(\mu)]^T. \tag{12.66}$$

Матрица $\mathbf{P}(0)$, таким образом, определяется в виде

$$\mathbf{P}(0) = E[\mathbf{P}'(\mu)], \tag{12.67}$$

что представляет собой осреднение матрицы $\mathbf{P}'(\mu)$ по нескольким выборкам из m интервалов, на которых вычисляется $\boldsymbol{\psi}(\mu)$.

Укажем далее, что вследствие принципиальной сходимости [6] уравнений (12.60)—(12.62) обычно предпочтительнее начальная оценка, в которой $\mathbf{a}(0)=\mathbf{0}$, а $\mathbf{P}$ принимается произвольной положительно определенной диагональной матрицей. Уравнения (12.63) и (6.37) подобны по форме, что позволяет выбрать

большие равные значения диагональных членов в матрице $\mathbf{P}(0)$, если нет какой-либо другой информации для пессимистической оценки ошибки, как предполагалось в конце разд. 12.3.

Далее примем $\mathbf{Q}(t)$ в виде

$$\mathbf{Q}(t) \cong E[\mathbf{Q}'(\mu)] = E[\mathbf{U}(\mu)\mathbf{U}^T(\mu)]. \tag{12.68}$$

Используя оценки $X_i(\mu+1|\mu)$ на основе уравнения (12.64), получаем

$$u_i(\mu) = X_i(\mu+1|\mu+1) - X_i(\mu+1|\mu). \tag{12.69}$$

Однако эта оценка $\mathbf{Q}$ опять будет приближенной; лучшая оценка в отсутствие какой-либо априорной информации может быть получена методом разд. 12.8, в котором также оценивается вектор $\mathbf{a}$ в уравнении (12.55).

Для того чтобы проиллюстрировать применение процедуры данного раздела, рассмотрим два примера.

Пример 12.2

Пусть задан одномерный сигнал $x(k)$, удовлетворяющий уравнению

$$x(k+1) = \varphi x(k) + v(k).$$

Используя уравнения (12.52)—(12.58), получим выражения для $D(k)$ в уравнении (12.59):

$$D(k) = \frac{P(k)\,x(k)}{P(k)\,x^2(k) + Q(k)},$$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P^2(k)\,x^2(k)}{P(k)\,x^2(k) + Q(k)},$$

$$\varphi^*(k+1) = \varphi^*(k) + D(k)\,\tilde{z}(k) = \frac{P(k+1)\,\varphi^*(k)}{P(k)} + \frac{P(k+1)\,x(k+1)\,x(k)}{Q(k)} =$$

$$= \varphi^*(k) - \frac{P(k)\,\varphi^*(k)\,x^2(k)}{P(k)\,x^2(k)+Q(k)} + \frac{P(k)\,x(k+1)\,x(k)}{Q(k)} -$$

$$- \frac{P^2(k)\,x^3(k)\,x(k+1)}{Q(k)\,P(k)\,x^2(k) + Q^2(k)}.$$

Таким образом, $\varphi^*(k+1)$ зависит от $\varphi^*(k)$, $P(k)$, $Q(k)$ и от измерений $x(k+1)$, $x(k)$.

Пример 12.3

Рассмотрим сигнал, описываемый двумерным вектором состояния $\mathbf{x}=(x_1, x_2)^T$ и удовлетворяющий линейному дискретному уравнению состояния

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix},$$

в котором φ_{ij} не известны.

Для оценивания параметров последнее уравнение состояния переписывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1(k) & x_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi_{11}x_1(k) + \varphi_{12}x_2(k) \\ \varphi_{21}x_1(k) + \varphi_{22}x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix}.$$

12.5. Использование калмановского предсказателя для последовательностей с известными параметрами

В тех случаях, когда состав параметров модели временно́й последовательности в пространстве состояний известен, ее прогнозирование можно осуществить, подставляя текущие значения состояния в эту модель, если состояния доступны измерениям. Если матрицы $\mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{P}(0)$ также известны, то прогнозирование поведения временно́й последовательности в будущем можно выполнить, используя метод фильтра Калмана [3]. Таким образом, результаты прогнозирования будут подвергаться последовательной коррекции (в соответствии с новыми поступающими измерениями). Если параметры матрицы $\mathbf{\Phi}$ получаются тем же способом, что и в разд. 12.4, их можно использовать в алгоритме прогноза типа калмановского. Следовательно, предположение о том, что будущее состояние известно, которое было сделано ранее при идентификации, на этапе прогнозирования исключается Прогноз выполняется следующим образом.

Пусть уравнение

$$\mathbf{x}(t+\theta) = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) \tag{12.70}$$

описывает состояние сигнала; кроме того, имеем

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{M}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), \quad E[\mathbf{w}(t)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{u}(t)\,\mathbf{w}^T(\tau)] \triangleq \mathbf{0}, \tag{12.71}$$

где $\mathbf{y}$, $\mathbf{w}$ — векторы измерения и белого шума в измерениях соответственно. По аналогии с разд. 12.3 оптимальное прогнозирование $\mathbf{x}^*$ удовлетворяет уравнению [3]

$$\mathbf{x}^*(t+\theta \mid t) = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{x}^*(t \mid t-\theta) + \mathbf{D}(t)\,\tilde{\mathbf{y}}(t \mid t-\theta), \tag{12.72}$$

где

$$\tilde{y}(t \mid t-\theta) \triangleq \mathbf{y}(t) - \mathbf{M}\mathbf{x}^*(t \mid -\theta), \tag{12.73}$$

а $\mathbf{x}^*(t|t-\theta)$ — оптимальный прогноз вектора $\mathbf{x}(t)$ по измерениям до момента $t-\theta$, оптимальный в случае гауссовских шумов.

Определим далее

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] \triangleq \mathbf{R}\delta(t-\tau), \tag{12.74}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t+\theta|t) \triangleq \mathbf{x}^*(t+\theta|t) - \mathbf{x}(t), \tag{12.75}$$

$$\mathbf{P}(t+\theta) \triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}(t+\theta|t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t+\theta|t)], \tag{12.76}$$

чтобы получить, по аналогии с выводом из разд. 12.3, но с учетом различий в записи уравнения измерений в данном разделе и в разд. 12.3, следующие выражения:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{M}^T\mathbf{R}^{-1}(t), \tag{12.77}$$

$$\mathbf{P}(t+\theta) = \mathbf{\Phi P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{\Phi}^T + \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{M}^T\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{MP}(t). \tag{12.78}$$

Здесь $\mathbf{Q}(t)$ — такая же матрица, как в уравнении (12.51). Матрицу $\mathbf{R}(t)$ можно получить из начальных рассогласований между измерениями и соответствующими аппроксимированными величинами. Такая оценка матрицы $\mathbf{R}$, очевидно, весьма приблизительна. Учет $\mathbf{w}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ может оказаться необязательным (см. разд. 12.8), если отсутствует какая-либо априорная информация о них. Матрицы $\mathbf{D}(t)$, $\mathbf{P}(t)$ можно получить так же, как в разд. 12.3.

12.6. Идентификация смешанных авторегрессионных моделей скользящего среднего для предсказателя

12.6.1. Свойства смешанных авторегрессионных моделей скользящего среднего

Фундаментальное свойство сигналов с гауссовским (нормальным) распределением состоит в том, что при прохождении такого сигнала через линейную динамическую систему выход также является гауссовским [3]. Следовательно, любая гауссовская временна́я последовательность может рассматриваться как выход некоторой линейной системы, *вход которой представляет собой независимую гауссовскую временну́ю последовательность.* Для прогноза гауссовского процесса оптимальный предсказатель является линейным, как было установлено при рассмотрении фильтров Винера и Калмана. В тех случаях, когда необходимо прогнозировать негауссовские временны́е последовательности, соответствующий линейный оптимальный предсказатель не может быть оптимальным.

Обобщенную линейную модель стационарной временной последовательности можно описать с помощью следующей передаточной функции:

$$G(s)=\frac{D_m s^m+D_{m-1}s^{m-1}+\cdots+D_1 s+D_0}{A_n s^n+A_{n-1}s^{n-1}+\cdots+A_1 s+A_0}=\frac{x(s)}{u(s)}, \quad (12.79)$$

где s — оператор преобразования Лапласа. Уравнение (12.79) можно записать в дискретной форме следующим образом:

$$G(z)=\frac{\beta_0+\beta_1 z^{-1}+\cdots+\beta_m z^{-m}}{\alpha_0+\alpha_1 z^{-1}+\cdots+\alpha_n z^{-n}}=\frac{x(z)}{u(z)}, \quad (12.80)$$

где z^{-1} обозначает оператор сдвига, определенный ранее в разд. 2.5.1, такой, что $z^n x_k = x_{k-n}$, а через x и u обозначены выход и вход модели с передаточной функцией $G(z)$, причем полюса (для устойчивости) и нули (для обращаемости) передаточной функции $G(z)$ находятся вне единичного круга на плоскости z^{-1} [1]. Обозначим далее

$$\alpha_0/\beta_0 \triangleq K, \quad (12.81а)$$

$$\beta_i/\beta_0 \triangleq b_i, \quad (12.81б)$$

$$\alpha_i/\alpha_0 \triangleq a_i, \quad (12.81в)$$

$$z^{-1}=B. \quad (12.81г)$$

Тогда уравнение (12.80) преобразуется к виду

$$G(B)=K\frac{1+b_1 B+\cdots+b_m B^m}{1+a_1 B+\cdots+a_n B^n}. \quad (12.82)$$

Рассматривая теперь вопрос построения моделей сигналов для целей прогнозирования, будем обозначать через x сигнал, а через u — недоступный измерению вход, который по предположению является гауссовским случайным сигналом с нулевым средним значением [4]. [Например, когда используется модель в форме передаточной функции [уравнения (12.79), (12.80)] для прогноза сбыта некоторого изделия только по прошлым данным о сбыте, то нельзя измерить вход $u(t)$.]. Следовательно, в задаче идентификации определяют не только параметры A_i, D_j или α_i,β_j в уравнениях (12.79) и (12.80) соответственно, но также необходимо определять и вход $u(t)$. С этой целью необходимо принять вход $u(t)$ в виде белого (некоррелированного) шума

[1] Необходимо предположить, что обращаемость существует, так как без априорной информации обратимая модель идентифицируется даже для необращаемых процессов. Поэтому для процессов с нулями внутри единичного круга обратные величины этих нулей идентифицируются [7].

с дисперсией σ_u^2. Для удобства вычислений можно, кроме того, предположить, что дисперсия σ_a^2 неизвестна и что коэффициент K в уравнении (12.82) равен единице. Такая постановка задачи соответствует случаю, когда входной сигнал с единичной дисперсией проходит через усилитель с коэффициентом усиления K, а затем подается на вход модели с передаточной функцией $G(z)$ в уравнении (12.82). Дисперсия выходного сигнала усилителя, который является входом для $G(z)$ в уравнении (12.82), в K^2 больше дисперсии входного сигнала усилителя, и поэтому $\sigma^2 = K^2 \cdot 1 = K^2$, где K^2 неизвестен. Следовательно, предположение о том, что дисперсия входа известна, а отношение α_0/β_0 неизвестно, полностью эквивалентно предположению, что $\alpha_0/\beta_0 = 1$, а дисперсия неизвестна. Отметим, что предположение о входе как гауссовском сигнале с нулевым средним, принятое в данном разделе, необходимо для получения оптимального прогноза и иногда исключается в разд. 12.6.5 и 12.7 для получения оптимальных результатов в линейной постановке.

Для иллюстрации процедуры идентификации описанной выше модели [8] рассмотрим представление уравнения (12.80) в форме дискретной передаточной функции.

Преобразуя выражение (12.82) и учитывая определение оператора B, получим

$$x_k + a x_{k-1} + \cdots + a_n x_{k-n} = u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_m u_{k-m}, \quad (12.83)$$

или

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_{k-i} + \sum_{j=0}^{m} \theta_j u_{k-j}, \quad (12.84)$$

где

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \quad kT = t,$$

и

$$E[u_j] = 0, \quad \forall j, \quad (12.85а)$$

$$E[(u_j)^2] = \sigma_u^2, \quad \forall j, \quad E[u_i u_j] = 0, \quad \forall i \neq j, \quad (12.85б)$$

$$\theta_0 = 1. \quad (12.85в)$$

Уравнение (12.83) представляет собой смешанную авторегрессионную модель скользящего среднего (АРСС) для x_k, в которой $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ — авторегрессионные коэффициенты для основного сигнала, а $\theta_0, \ldots, \theta_n$ — коэффициенты скользящего среднего для случайного сигнала. Применяя к уравнению (12.83) оператор B, получим

$$\varphi(B)\, x_k = \theta(B)\, u_k. \quad (12.86)$$

Процесс, описываемый уравнением (12.83), теперь можно представить сходящейся бесконечной чистой авторегрессией

$$\theta^{-1}(B)\,\varphi(B)\,x_k = u_k \tag{12.87}$$

или сходящейся бесконечной чистой последовательностью со скользящим средним

$$x_k = \varphi^{-1}(z)\,\theta(z)\,u_k, \tag{12.88}$$

причем сходимость обеспечивается условиями, налагаемыми на корни уравнения (12.80). Заметим, что уравнение (12.88) по существу является дискретным аналогом интеграла свертки в уравнении (3.4). Благодаря свойствам сходимости моделей бесконечно большой размерности их можно описать выражениями конечного порядка. С учетом этого чистая модель скользящего среднего [уравнение (12.88)] записывается в виде

$$x_k = \sum_{i=0}^{\infty} \theta'_i\, u_{k-i} = \sum_{i=0}^{p} \theta'_i\, u_{k-i} + \varepsilon'_k, \tag{12.89}$$

где ε'_k можно сделать произвольно малым при конечном p. Аналогично чистая авторегрессионная последовательность конечного порядка (идентичная модели предсказателя Винера [2]) получается в следующем виде:

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi'_j\, x_{k-j} + u_k = \sum_{j=1}^{q} \varphi'_j\, x_{k-j} + u_k + \varepsilon''_k. \tag{12.90}$$

Член ε'_k также можно сделать произвольно малым путем соответствующего выбора q [7]. Однако при уменьшении числа членов авторегрессии уравнение (12.83) становится аналогичным уравнению (12.89):

$$x_k = \sum_{j=1}^{n-w} \varphi''_j\, x_{k-j} + \sum_{i=0}^{\infty} \theta''_i\, u_{k-1} = \sum_{j=1}^{n-w} \varphi''_j\, x_{k-j} + \sum_{i=0}^{v \geqslant 1} \theta''_i\, u_{k-1} + \varepsilon^*, \tag{12.91}$$

где w может принимать значения, равные 1, 2, ..., n. Таким образом, если число авторегрессионных параметров или параметров скользящего среднего уменьшается на единицу и больше, то в случае истинной модели с $n+m+1$ параметрами для описания системы требуется бесконечное число параметров, как это следует из уравнений (12.89) — (12.91). Можно показать, что модель смешанного авторегрессионного процесса скользящего среднего, в которой порядок авторегрессионной части равен $n'=n+i$, а порядок части скользящего среднего есть $m'=m+j$, адекватно представляет такой процесс при всех i, $j \geqslant 0$ [4]. Однако, поскольку любое завышение порядка при аппроксима-

ции ($i>0$ или $j>0$) приводит к увеличению ошибок округления, идентификация должна обеспечивать выбор минимального адекватного порядка.

12.6.2. Процедура идентификации

После обсуждения вопроса о завышении или занижении порядков рассмотрим собственно задачу идентификации[1]. Сначала исследуем возможность применения метода последовательной регрессии для идентификации только авторегрессионных членов смешанного авторегрессионного процесса скользящего среднего. (Достоинством регрессионного метода идентификации являются его свойства максимального правдоподобия, описанные в разд. 5.5 для гауссовских чистых авторегрессионных моделей. Другие методы можно использовать в тех случаях, когда не требуется высокая сходимость.) Регрессионный метод идентификации предполагает минимизацию остаточного члена w_k временно́го ряда, задаваемого выражением

$$x_k = \sum_{i=1}^{n'} \varphi_i x_{k-i} + w_k, \tag{12.92}$$

где w_k обозначает члены скользящего среднего

$$w'_k = \sum_{j=0}^{m'} \theta_j u_{k-j} \tag{12.93}$$

по полной аналогии с уравнением (12.84), но при $n' \geqslant n$, $m' \geqslant m$. Из уравнения (12.93), таким образом, следует, что последовательность w_k коррелирована с w_{k-m+i}. Однако для состоятельного оценивания φ_i только на основе x_k требуется, чтобы последовательность w_k в уравнении (12.92) была последовательностью белого шума, как это вытекает из последующего анализа.

Пусть последовательность x_k описывается уравнением

---

[1] Процессы с шумом на входе/выходе исследовались в разд. 5.4. Для идентификации стохастических процессов в замкнутых системах [9] необходимо шум или влияние шума измерений на входе представлять как белый шум. С этой целью производится умножение некоторого окрашенного шума $n_k = a(B)w_k$ на $a^{-1}(B)$, где w_k — белый шум. Отметим, что, даже если в замкнутую систему вводится только белый шум, обратная связь порождает коррелированный шум на входе. Поэтому в случае замкнутой системы необходимо идентифицировать $a^{-1}(B)$, например, методом из разд. 12.6, чтобы исключить систематические ошибки. После того как представление в виде белого шума выполнено, производится идентификация методом из разд. 5.4.2.

(12.84), а оценка $\hat{x}_k$ для x_k получается по уравнению (12.86) на основе измерений x_{k-i}:

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varphi}_i x_{k-i}, \tag{12.94}$$

где $\hat{\varphi}_i$ обозначает параметры φ_i, идентифицируемые рекурсионным методом наименьших квадратов путем минимизации показателя J, где

$$J = E[(x_k - \hat{x}_k)]^2 = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_{k-i} + \sum_{j=0}^{m} \theta_j u_{k-j} - \sum_{i=1}^{n} \hat{\varphi}_i x_{k-i}\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_{k-i} - \sum_{i=1}^{n} \hat{\varphi}_i x_{k-i}\right)^2\right] + 2E\left[\left(\sum_{j=0}^{m} \theta_j u_{k-j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_{k-i} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{n} \hat{\varphi}_i x_{k-i}\right)\right] + E\left[\left(\sum_{j=0}^{m} \theta_j u_{k-j}\right)^2\right]. \tag{12.95}$$

При $\hat{\varphi}_i = \varphi_i$ показатель качества J равен $E[\sum_{j=0}^{m} \theta_j u_{k-j}]^2$. Однако если $\hat{\varphi}_i \neq \varphi_i$, то J может быть еще уменьшен, так как $w_k = \sum_{j=0}^{m} \theta_j u_{k-j}$ не является белым шумом.

Поскольку последовательности w_k и w_{k-m+1} коррелированы, нельзя получить состоятельные регрессионные оценки x_k, даже если выборки x_k, ..., x_{k-m} производятся на $m+1$ интервалах. В этом случае для оценивания параметров не все располагаемые измерения могут быть использованы, и идентификация не является состоятельной. Последнее затруднение можно преодолеть, если заново рассмотреть бесконечную чистую авторегрессионную модель (12.87), в которой u_k есть белый шум. Было показано, что эта модель эквивалентна модели, описываемой уравнением (12.84). Кроме того, ранее было показано, что бесконечную последовательность (12.83) можно адекватно представить конечной чистой авторегрессионной моделью достаточно высокого порядка, как в уравнении (12.90). Следовательно, параметры φ_i' ($i=1$, ..., q) можно быстро и, в случае последовательности u_k гауссовского типа, эффективно идентифицировать с помощью алгоритма последовательной регрессии из гл. 6. Порядок q указанной выше чистой авторегрессионной модели может быть выбран путем проверки, коррелирована ли последовательность $\hat{u}_k = u_k + \varepsilon_k''$ в уравнении (12.90). Пока она коррелирована, порядок q следует увеличивать.

При идентификации φ_i' чистой авторегрессионной модели, рассмотренной выше, можно вычислить оценки $\hat{x}_k$ для x_k из выражения

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^{q} \varphi_i' x_{k-i}. \tag{12.96}$$

Т[illegible]лучим

$$\hat{u}_k = x_k - \hat{x}, \tag{12.97}$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \hat{u}_k^2. \tag{12.98}$$

После того как оценки $\hat{u}_k$ найдены, задача идентификации φ_i, θ_j в уравнении (12.84) превращается в задачу идентификации процесса на входе/выходе, описываемого этими уравнениями, в которых имеются как входы u_k, так и выходы x_k [1]. Для последней задачи идентификации может быть получено несмещенное, состоятельное и почти эффективное решение методом регрессии для гауссовских последовательностей, поскольку в гауссовском случае $\hat{u}_k$ являются эффективными оценками u_k при достаточно высоком порядке q. Заметим далее, что описанный метод позволяет найти адекватные и несмещенные линейные оценки также и для негауссовских процессов. Таким образом, показано, что данный анализ обеспечивает получение алгоритма последовательной идентификации, который может непрерывно уточнять оценки параметров по мере поступления результатов измерений.

12.6.3. Оценивание порядков

Задача оценивания порядков m, n процесса до сих пор не решалась, хотя порядки часто бывают заранее не известны. Эти порядки можно оценить, если рассмотреть некоторые свойства смешанных авторегрессионных процессов скользящего среднего, уже обсуждавшихся в разд. 12.6.1, следующим образом.

С помощью уравнения (12.91) было показано, что если смешанный авторегрессионный процесс скользящего среднего имеет порядки m, n, как в уравнении (12.84), то для снижения порядка авторегрессии модели на единицу и более при условии адекватного представления процесса потребуется бесконечное число параметров скользящего среднего. Аналогично, если чис-

[1] Если φ_i' идентифицированы, то для нахождения оценок φ_i и θ_j можно использовать деление полиномов [7] с использованием связи между (12.87) и (12.89).

ло параметров скользящего среднего уменьшить на единицу и более, то может потребоваться бесконечно большое число параметров авторегрессии.

Поскольку завышение порядков приводит к увеличению ошибок округления, то точные (не завышенные) порядки m, n можно оценить, если удовлетворяется следующее уравнение, которое получается из уравнений (12.87), (12.90):

$$\hat{\varphi}_{n'}(B) = \hat{\theta}_{m'}(B)\,\hat{\varphi}'_q(B) + \varepsilon_{q+m'}(B) \cdots \qquad (12.99)$$

(где m', n', q обозначают порядки), так что $\sum_{i=1}^{q+m'} \varepsilon_i^2$ есть минималь или величина, близкая к минимали при наименьших значениях $m+n$, а ε_i обозначает элементы $\varepsilon(B)$. Для $\varepsilon(B)$ это означает, что если $\Sigma\varepsilon_i^2|_{m'+n'}$ значительно меньше, чем $\Sigma\varepsilon_i^2|_{m'+n'-1}$, но несколько больше минимальной суммы $\Sigma\varepsilon_i^2|_{m'+n'+j}$, то следует выбрать порядки, равные $m'+n'$. Заметим, что оценки $\hat{\varphi}'(B)$, $\hat{\varphi}(B)$, $\hat{\theta}(B)$ определяются согласно разд. 12.6.2.

Оценивание порядков проводится путем первоначальной идентификации $\hat{\varphi}(B)$, $\hat{\theta}(B)$ по $\hat{u}_k$, x_k, как в разд. 12.6.2, при достаточно высоких порядках $m'=m_0/2$, $n'=n_0$. Далее идентификация $\hat{\varphi}(B)$, $\hat{\theta}(B)$ повторяется при $m'=m_0$, $n'=n_0$. Этот процесс продолжается при последовательном уменьшении вдвое порядка m' или n' на каждой итерации до тех пор, пока $\varepsilon(B)$ не станет минималью или величиной, близкой к ней, при наименьших $m'+n'$. Максимальное число требуемых итераций равно

$$\mu = 1 + \log_2(m_0 n_0) \qquad (12.100)$$

(если $m_0 n_0 = 2^\mu$, то требуется μ итераций для того, чтобы определить один квадрат в сетке m_0, n_0).

Более длительное, но и более точное определение порядков, для которого требуется такое же число итераций, производится путем проверки величины $I=(1/M)\sum_{k=1}^{M}(x_k-\hat{x}_k)^2$ для $\hat{\theta}(B)$, $\hat{\varphi}(B)$ на каждой итерации, как было показано в разд. 5.4 для конечномерной модели. Следовательно, наименьшая величина суммы $m'+n'$, при которой $I \simeq (1/M)\sum_{j=1}^{M}\hat{u}_k^2$, где $\hat{u}_k$ есть остаточная часть чистой авторегрессионной модели уравнения (12.90), дает требуемую оценку порядков.

12.6.4. Прогнозирование при помощи алгоритма идентификации смешанной авторегрессионной модели скользящего среднего

Целью анализа, выполненного в разд. 12.6.1—12.6.3, было нахождение оценок параметров смешанной авторегрессионной модели скользящего среднего для временны́х последовательностей. Эти оценки находятся последовательно, т. е. уточняются с каждым новым измерением. Следовательно, по этим оценкам параметров можно получить будущее значение выхода модели x_{k+1} с использованием предыдущих измерений и предыдущих оценок входа $\hat{u}_{k-i}$, причем последние определяются на основании предыдущих ошибок прогнозирования, как в разд. 12.6.2.

Итак, мы установили, что прогнозирование x_{k+1} в соответствии с непрерывно обновляемой моделью, как в разд. 12.6.2, является состоятельным для гауссовских временны́х последовательностей благодаря состоятельности оценок параметров и входных сигналов. Следовательно, если параметры смешанной авторегрессионной модели скользящего среднего известны, то можно произвести прогноз, который будет сравним с прогнозом по методу фильтра Калмана, параметры которого известны. Таким образом, различие между этими двумя подходами состоит в том, что для прогноза при помощи авторегрессионных моделей скользящего среднего требуется восстановление входов по наименьшим среднеквадратическим ошибкам прогноза, тогда как в соответствующем фильтре Калмана такое восстановление исключается за счет последовательного вычисления коэффициентов усиления для последнего члена ошибки. Очевидно, это различие связано только с прогнозированием, поскольку в методе фильтра Калмана полагается, что параметры и порядок известны, тогда как в методе из разд. 12.6.2, 12.6.3 проводится полная идентификация. (Использование расширенного фильтра Калмана, как в разд. 12.9, также позволяет осуществить указанную выше идентификацию, однако для этого обычно необходимо знать порядки и ковариации.)

После того как по алгоритмам из разд. 12.6.2 и 12.6.3 получены оценки параметров, становится возможным преобразовать результирующую смешанную авторегрессионную модель скользящего среднего в модель, определенную в пространстве состояний. В итоге получаем модель фильтра Калмана для последовательного прогноза без восстановления входных сигналов. Такое преобразование обсуждается далее, в разд. 12.8.

12.6.5. Идентификация параметров предсказателей для негауссовских последовательностей

Метод калмановской фильтрации и методы смешанной авторегрессионной модели скользящего среднего, описанные выше, рассматривались применительно к линейному случаю. Линейные модели предсказателей с гауссовскими белыми шумами на входе оптимальны для гауссовских последовательностей, однако это не выполняется при негауссовских последовательностях, когда оптимальный предсказатель нелинеен (имеет независимый шум на входе). С помощью метода из разд. 12.6.1 — 12.6.4 можно, однако, построить *оптимальную линейную модель прогноза* при негауссовском белом шуме на входе негауссовских последовательностей, которая обычно вполне адекватна, но *полностью оптимальна* только в том случае, когда негауссовский входной сигнал также независим. Оценки параметров, которые при этом получаются, остаются состоятельными и несмещенными [10], но становятся уже неэффективными, а именно при увеличении числа измерений они сходятся к истинным значениям, но не удовлетворяют критерию минимума дисперсии. Результирующая модель предполагает восстановление входной последовательности с помощью бесконечной авторегрессионной модели (входной сигнал является остаточным членом в бесконечной модели и поэтому представляет собой негауссовский белый шум). Следовательно, если оценки параметров сходятся, то результирующий прогноз является линейно оптимальным.

Оптимальный нелинейный предсказатель, построенный на основе авторегрессионной модели скользящего среднего для негауссовских последовательностей y_k, обусловленных нелинейными измерениями гауссовских последовательностей или прохождением их через нелинейные усилительные звенья, можно получить, преобразуя y_k в гауссовский сигнал x_k следующим образом.

Рассмотрим элемент y_k с маргинальной плотностью распределения вероятностей $f(y)$. Преобразование y_k в z_k с маргинальной плотностью распределения вероятностей $\varphi(z)$ описывается соотношением [11]

$$\varphi(z) = f(y)\left|\frac{dy}{dz}\right|, \quad \frac{dz}{dy} \neq 0. \tag{12.101}$$

Исходя из этого y_k можно преобразовать в равномерно распределенный шум u_k согласно выражениям

$$u = \int_{-\infty}^{y} f(y)\,dy, \tag{12.102}$$

$$\frac{du}{dy} = f(y), \tag{12.103}$$

которые удовлетворяют функции $\varphi(u)$, где

$$\varphi(u) = \frac{f(y)}{f(y)} = 1. \qquad (12.104)$$

Сформулировав задачу преобразования функции плотности вероятностей с произвольным распределением в функцию с равномерным распределением, продолжим рассмотрение задачи преобразования в функцию x_k с гауссовским распределением, предполагая, что задана дисперсия σ_x^2. Преобразование функции плотности с равномерным распределением в функцию с гауссовским распределением выполняется, если решить уравнение (12.102), подставляя x вместо y и гауссовскую функцию плотности с $\sigma_x = 1$ вместо $f(y)$. Тогда получаем зависимость, показанную на рис. 12.2, которая единственным образом определяет x_k для данного u_k. Отметим, что предположение о гауссовском распределении применяется к x_k только тогда, когда его совместное распределение является гауссовским [3]. Однако в случае гауссовских последовательностей с нелинейными измерениями это предположение допустимо для x_k.

Проводя преобразование от y_k к гауссовскому x_k можно состоятельно идентифицировать параметры оптимального предсказателя для x_k, построенного на основе авторегрессионной модели скользящего среднего при помощи методов из разд. 12.6.1 — 12.6.4, через параметры гауссовского белого шума на входе w_k. Предположение о гауссовском распределении справедливо, если восстановленный входной сигнал является гауссовским. Тогда предсказатель оптимален, так как гауссовский белый шум независим во все моменты и его совместное и маргинальное распределения одинаковы. Следовательно, модель

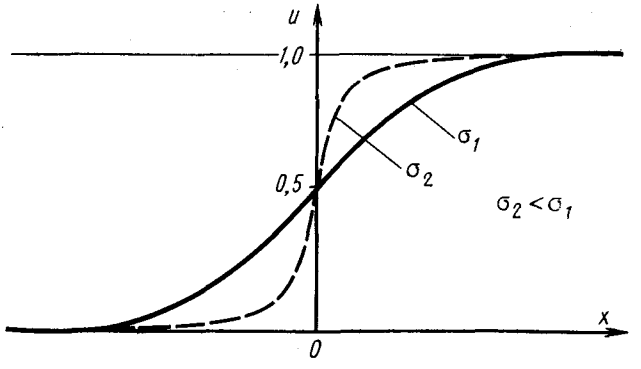


Рис. 12.2. Преобразование от равномерно распределенной к гауссовской переменной.

u — равномерно распределенная переменная; x — гауссовская переменная.

предсказателя для x_k определяется линейным соотношением (12.86), т. е.

$$\varphi(B)\, x_k = \theta(B)\, w_k, \tag{12.105}$$

из которого далее получаем бесконечномерную авторегрессионную модель

$$\theta^{-1}(B)\,\varphi(B)\, x_k = \gamma(B)\, x_k = \sum_i \gamma_i\, x_{k-i} = w_k. \tag{12.106}$$

Дисперсии σ_w^2, σ_x^2 для этой модели равны

$$\sigma_w^2 = E\left[w_k^2\right], \tag{12.107а}$$

$$\sigma_x^2 = E\left[x_k^2\right] = E\left[(\gamma(B)\, w_k)^2\right] = \sigma_w^2 \sum_i \gamma_i^2. \tag{12.107б}$$

Из уравнения (12.107б) следует, что для любой гауссовской последовательности

$$x_k' = K x_k \tag{12.108}$$

дисперсия $\sigma_{x'}^2$ удовлетворяет равенству

$$\sigma_{x'} = K\sigma_x, \tag{12.109}$$

и, следовательно,

$$\sigma_{w'} = K\sigma_w. \tag{12.110}$$

Поэтому параметры $\varphi(B)$ и $\theta(B)$, так же как и в уравнении (12.105), не зависят от величины σ_x.

После того как оптимальные оценки $\hat{x}_k$ для гауссовской последовательности x_k получены, требуется обратное преобразование до оценивания оптимального прогноза $\hat{y}_k$ негауссовской последовательности y_k. Обозначим преобразование от y_k к x_k через

$$x_k = T(y_k), \tag{12.111}$$

где T — нелинейная функция, которую можно численно оценить по уравнению (12.102) и из рис. 12.2. Тогда возможно численное решение

$$y_k = T^{-1}(x_k). \tag{12.112}$$

Кроме того, преобразование $T^{-1}(x_k)$ можно с любой желательной точностью аппроксимировать полиномом (для $3\sigma_x \ll$ диапазон x_k)

$$T^{-1}(x_k) \cong \sum_{i=0}^{r} \eta_i\, x_k^i. \tag{12.113}$$

Затем можно выполнить оптимальный прогноз $\hat{y}_k$ для y_k, минимизируя $E[y_k - \hat{y}_k)^2]$ так, чтобы для однозначного преобразования $T^{-1}(x_k)$

$$\hat{y}_k = E\left[y_k \mid y_{k-j}\right] = \sum_{i=1}^{r} \eta_i E\left[x_k^i \mid x_{k-j}\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \quad (12.114)$$

$\hat{y}_k$ определялось соотношением [12]

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{r} \eta_i \int_{-\infty}^{\infty} x_k^i P\left(x_k \mid x_{k-j}\right) dx_k, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \quad (12.115)$$

где $P(x_k \mid x_{k-j})$ — гауссовская функция плотности распределения вероятностей со средним x_k и дисперсией σ_x^2 вследствие гауссовского распределения x_k. Свойство гауссовского распределения $P(x_k \mid x_{k-j})$ означает, что все моменты более высокого порядка однозначно определяются через $\hat{x}_k$ и σ_x.

Оценивание $\hat{y}_k$ из уравнения (12.115) производится с учетом уравнения (12.113) и оператора

$$m_{k,i} \triangleq E\left(x_k^i \mid x_{k-j}\right). \quad (12.116)$$

В соответствии с работой [10] имеем

$$m_{k,i} = \hat{x}_k^i + \frac{i(i-1)}{2} \int_0^{\sigma_x^2} m_{k,i-2}\, d\left(\sigma_x^2\right), \quad i = 1, 2, 3, \ldots. \quad (12.117)$$

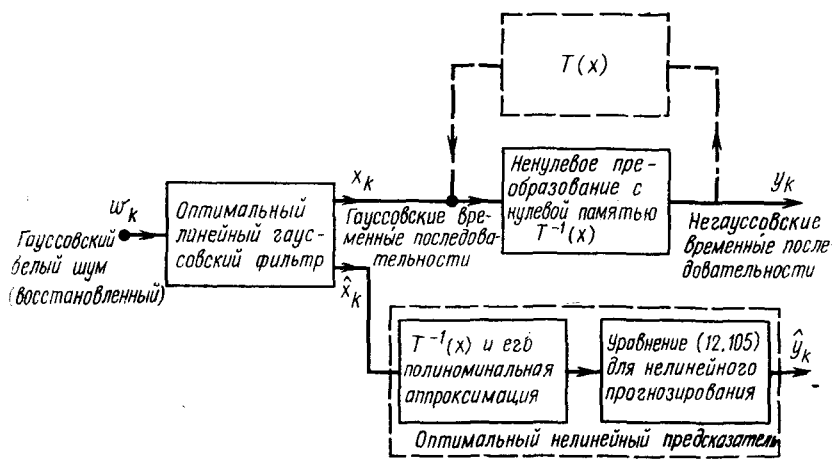


Рис. 12.3. Оптимальный предсказатель для негауссовских последовательностей.

В итоге получаем оптимальную оценку для системы рассмотренного типа (рис. 12.3):

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{r} \eta_i m_{k,i}. \tag{12.118}$$

Если σ_x ненамного меньше диапазона измерения x_k, то, учитывая неопределенный интеграл в уравнении (12.114), можно рассмотреть в качестве аппроксимации $T^{-1}(x)$ локальное полиномиальное приближение невысокого порядка в окрестности $\hat{x}_k$. С другой стороны, для $T^{-1}(x)$ может потребоваться экстраполяция невысокого порядка, например по осредненным наклонам на концах диапазона данных или путем добавления ограничений на этих концах до начала полиномиальной аппроксимации. Таким образом, диапазон преобразования $T^{-1}(x)$ расширяется.

Хотя оценка $\hat{y}_k$ основана на допущении $\sigma_x = 1$, можно убедиться, с учетом уравнения (12.108), что для любого $x'_k = Kx$ величины $m'_{k,j}$, соответствующие $m_{k,j}$ в уравнении (12.117), определяются выражением

$$m'_{k,i} = K^i m_{k,i} \tag{12.119}$$

при

$$y_k \cong \sum_{i=1}^{r} \frac{\eta_i}{K^i} m'_{k,i}. \tag{12.120}$$

Последовательность $\hat{y}_k$ из уравнения (12.118) остается неизменной, что указывает на независимость $\hat{y}_k$ от выбора σ_x. Заметим далее, что когда преобразование $T^{-1}(x_k)$ дает не единственную величину, то определение соответствующей величины можно выполнить, используя оптимальное линейное прогнозирование, рассмотренное ранее в этой главе. Поэтому выбирается оценка $\hat{y}_k$, которая ближе всего к линейному прогнозу, хотя она не обязательно оптимальна.

12.7. Смешанные авторегрессионные модели скользящего среднего нестационарных последовательностей и систем

12.7.1. Непериодическая нестационарность

Бокс и Дженкинс [4] показали, что стационарные смешанные авторегрессионные модели со скользящим средним можно применять к нестационарным последовательностям, которым свойственна некоторая однородность. Такие последовательности

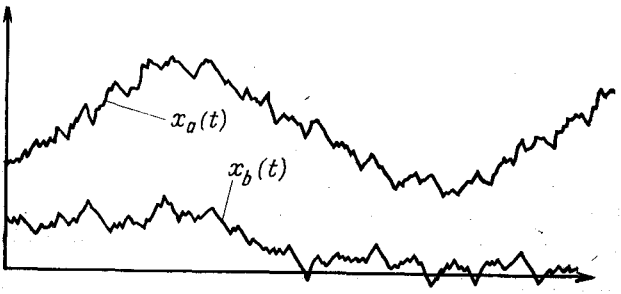


Рис. 12.4. Нестационарные последовательности.

встречаются часто (рис. 12.4). Видно, что последовательность x_a на рис. 12.4 имеет переменный наклон, а последовательность x_b имеет нестационарное среднее значение. Последовательность x_a, однако, проявляет определенную однородность относительно своего переменного наклона, а последовательность x_b — относительно своих средних значений. Такая однородность характерна для некоторых длиннопериодических функций. Следовательно, как предположили Бокс и Дженкинс, в модель нестационарных временны́х последовательностей стационарность можно ввести, вычисляя разности этих последовательностей следующим образом.

Рассмотрим временну́ю последовательность x_b, имеющую нестационарное среднее значение, как на рис. 12.4. В то время как поведение последовательности $x_b(t)$, конечно, нестационарное, последовательность $(1-B)x_b(t)$ можно адекватно представить стационарной моделью (здесь B, как и в разд. 12.6, — оператор запаздывания), так как разность $x_b(t_i)-x_b(t_{i-1})$ не зависит от среднего значения на длительном интервале. Аналогично в последовательности x_a на рис. 12.4 можно исключить нестационарность, если ее вычесть дважды, т. е. рассмотреть последовательность $(1-B)^2x_a(t)$. После того как порядок q разности определен, получаем стационарную модель $\xi(t)=(1-B)^q x(t)$, которая подобна уравнению (12.83):

$$\alpha_0\xi_k+\alpha_1\xi_{k-1}+\cdots+\alpha_n\xi_{k-n}=\beta_0 u_k+ \\ +\beta_1 u_{k-1}+\cdots+\beta_m u_{k-m}, \qquad (12.121а)$$

или, если использовать оператор запаздывания B,

$$(\alpha_0+\alpha_1 B+\cdots+\alpha_n B^n)\,\xi(t)=(\beta_0+\beta_1 B+\cdots+\beta_m B^m)\,u(t). \qquad (12.121б)$$

Идентификация постоянных параметров уравнений (12.121) выполняется в соответствии с процедурой из разд. 12.6, в котором идентифицируются параметры уравнения (12.83).

Для определения порядка разности q необходимо вычислять автокорреляционную функцию, как это было рассмотрено в гл. 4, для $x(t)$, $(1—B)x(t)$, ..., $(1—B)^q x(t)$. При первом порядке разности, для которой автокорреляционная функция $\varphi_{\zeta\zeta}(t)$ сходится к нулю за относительно малое t, имеем величину q. (Очевидно, автокорреляционная функция для последовательности $x_b(t)$ на рис. 12.4 не может быстро уменьшиться до нуля, так как среднее значение последовательности $x(t)x(t—rt)$ при достаточно большом r не равно нулю.) Отметим, что число выборок $x(t)$, которое требуется для того, чтобы оценки параметров для прогнозирующей модели (разд. 12.6) сошлись, очень велико, поскольку сигнал на входе модели неизвестен. В связи с этим исключение нестационарности, как было рассмотрено в данном разделе, оказывается весьма существенным в случаях нестационарных последовательностей.

12.7.1а. Процессы на входе — выходе. В том случае, когда входная последовательность также доступна измерению, а ее среднее значение не обязательно равно нулю, для построения нестационарной модели входа — выхода необходимы определение разностей как для входа, так и для выхода и анализ автокорреляционной функции этих последовательностей [4]. Заметим, что если на вход линейной стационарной системы подается нестационарный сигнал, то выходной сигнал также будет нестационарным и члены $(1—B)^q$ для входа и выхода сокращаются.

12.7.2. Периодическая нестационарность

В тех случаях, когда существуют периодические (сезонные) явления, такие, что нестационарный процесс имеет приближенно стационарное поведение, если измерения проводятся на M более коротких интервалах (например, ежемесячные осредненные метеорологические измерения с периодом $M=12$ месяцев), имеем

$$\nabla_M \triangleq 1 - B^M, \tag{12.122}$$

$$B_M \triangleq B^M. \tag{12.123}$$

Следовательно, периодический процесс x_k с периодом, состоящим из M интервалов, как на рис. 12.5, можно описать по аналогии с уравнением (12.121б) следующим образом [4]:

$$\left[1 + a_{M,1} B_M + a_{M,2} B_M^2 + \cdots + a_{M,p} B_M^p\right] \nabla_M^E x_k = \\ = \left(c_{M,0} + c_{M,1} B_M + c_{M,2} B_M^2 + \cdots + c_{M,q} B_M^q\right) u_k, \tag{12.124}$$

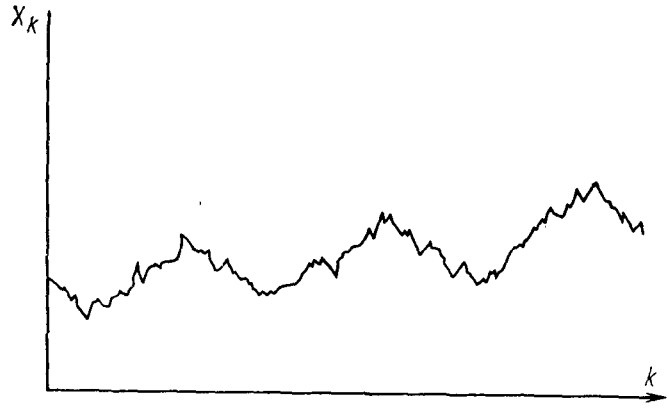


Рис. 12.5. Периодическая нестационарность.

где используется оператор вычитания $(1-B_M)^E$ порядка E для того, чтобы исключить непериодическую нестационарность (разд. 12.7.1). Кроме того, если последовательность x_k зависит от измерений x_{k-M}, x_{k-2M}, x_{k-3M},..., а также от измерений x_k, x_{k-1}, x_{k-2},..., то можно записать

$$\left(1+\alpha_1 B+\alpha_2 B^2+\cdots+\alpha_r B^r\right) {}_1^D u_k = \\ =\left(\gamma_0+\gamma_1 B+\gamma_2 B^2+\cdots+\gamma_s B^s\right) v_k, \quad (12.125)$$

где оператор разности порядка D служит для исключения непериодической нестационарности. Подставляя u_k из уравнения (12.125) в (12.124), получаем после умножения на $(1-B)^D(1+\alpha_1 B+\ldots+\alpha_r B^r)$ следующее выражение:

$$\left(1+\alpha_1 B+\alpha_2 B^2+\cdots+\alpha_r B^r\right)\left(1+a_{M,1}B_M+\cdots+\right. \\ \left.+a_{M,p}B_M^p\right)\nabla_1^D\nabla_M^E x_k=\left(\gamma_0+\gamma_1 B+\cdots+\gamma_s B^s\right)\left(c_{M,0}+\right. \\ \left.+c_{M,1}B_M+\cdots+c_{M,q}B_M\right)v_k. \quad (12.126)$$

Аналогично, если появляются различные периодические явления с разными периодами (например, 1, M, N), то

$$\left(1+\alpha_1 B+\cdots+\alpha_r B^r\right)\left(1+a_{M,1}B_M+\cdots+a_{M,p}B_M^p\right)\left(1+\right. \\ \left.+a_{N,1}B_N+\cdots+a_{N,w}B_N^w\right)\nabla_1^D\nabla_M^E\nabla_N^F x_k= \\ =\left(\gamma_0+\gamma_1 B+\cdots+\gamma_s B^s\right)\left(c_{M,0}+c_{M,1}B_M+\cdots+C_{M,q}B_M^q\right)\left(c_{N,0}+\right. \\ \left.+c_{N,1}B_N+\cdots+C_{N,\sigma}B_N^\sigma\right)v_k. \quad (12.127)$$

Величины M, N можно идентифицировать, анализируя автокорреляционную функцию x_k для того, чтобы установить перио-

дические максимумы этой функции; коэффициенты и порядки уравнения (12.127) получают в соответствии с процедурой из разд. 12.6, учитывая, что для исключения нестационарности может оказаться необходимым рассмотренный выше в данном разделе разностный метод.

12.8. Построение моделей фильтра Калмана по параметрам авторегрессионной модели скользящего среднего

В разд. 12.6.4 было установлено, что после того как параметры смешанной авторегрессионной последовательности скользящего среднего идентифицированы, можно осуществлять прогнозирование, непрерывно обрабатывая входную последовательность. Кроме того, было также показано выше, что параметры, оцениваемые в разд. 12.6, определяют соответствующие параметры фильтра Калмана для последовательного прогнозирования без обновления входных последовательностей. Поэтому необходимо использовать преобразование, рассмотренное в разд. 2.5.1, чтобы построить модель в пространстве состояний. Отметим, что модель, определенная в пространстве состояний [уравнения (2.63), (2.64)], практически идентична модели, описываемой уравнением (12.70), если последовательность $\boldsymbol{\Gamma}\, u(k)$ в уравнении (2.63) означает то же, что $\mathbf{u}(t)$ в уравнении (12.70). Тогда процедура, описанная в данном разделе, позволяет определить матрицы $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ из уравнения (2.63); при этом матрица $\mathbf{C}$ уравнения (2.64) задается уравнением (2.67). Отметим также, что если последовательность w_k из уравнения (12.71) также учитывается, то можно модифицировать алгоритм идентификации фильтра Калмана следующим образом [13—15].

Рассмотрим систему с дискретными скалярными измерениями y_k:

$$y_k = \mathbf{H}^T \mathbf{x}_k + w_k, \quad \mathbf{x}_k \stackrel{\Delta}{=} [x_k, \ldots, x_{k-n+1}]^T, \tag{12.128}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i x_{k-i} = \sum_{j=1}^{n} \theta_j u_{k-j}, \quad \varphi_0 = 1, \tag{12.129}$$

где w_k и u_k — белые шумы. Последовательность u_k связана с $\mathbf{u}_k$ из (12.70) с помощью уравнения (2.66) и не коррелирована с w_k. Кроме того, из разд. 2.5 следует

$$\mathbf{H} = [1, 0, 0, \ldots, 0]^T. \tag{12.130}$$

Подставляя выражение для x_k из уравнения (12.128) в (12.129), получим

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i y_{k-1} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i w_{k-1} + \sum_{j=1}^{m} \theta_j u_{k-j} = \sum_{i=0}^{n} \psi_i r_{k-i} \stackrel{\Delta}{=} n_k, \tag{12.131}$$

где r_k — другой дискретный процесс белого шума. Модель АРСС уравнения (12.131), связывающая y_k и r_k, можно идентифицировать так же, как в разд. 12.6. В итоге получаем оценки $\hat{\varphi}(B)$, $\hat{\psi}(B)$, $\hat{\sigma}_r^2$ для $\varphi(B)$, $\psi(B)$, σ_r^2, где через σ_r^2 обозначена дисперсия r_k. Тогда

$$E\left[n_k n_{k+h}\right] = \sigma_r^2 \sum_{i=0}^{n-h} \psi_i \psi_{i+h} =$$

$$= \begin{cases} \sigma_u^2 \sum_{j=1}^{m-h} \theta_j \theta_{j+h} + \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{n-h} \varphi_i \varphi_{i+h}, & \forall h \leqslant m, \\ \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{n-h} \varphi_i \varphi_{i+h}, & \forall m < h \leqslant n, \end{cases} \tag{12.132}$$

где σ_u^2 и σ_w^2 — дисперсии u_k и w_k соответственно. Оценки σ_u^2, σ_w^2 и $\theta(B)$ находятся через σ_r^2, $\varphi(B)$ и $\psi(B)$, идентифицированные ранее. Единственность этих оценок можно доказать, если выполняются условия устойчивости и обращаемости модели [13]. Без потери общности можно предположить, что $\varphi_1=1$. Поэтому с помощью преобразования из разд. 12.5 можно определить все ковариации и параметры модели фильтра Калмана, учитывая, что $\sigma_w^2=R$ в уравнении (12.71) в случае скалярных измерений и что матрица $\mathbf{Q}$ из разд. 12.5 есть

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T \sigma_w^2. \tag{12.133}$$

Матрица $\mathbf{B}$ представляет собой решение уравнения (2.77), если вместо a_i, γ_j в уравнение (2.77) подставить φ_i, θ_j. Указанные выше оценки являются состоятельными при состоятельной идентификации по АРСС-модели и ограниченными, если для идентификации по АРСС-модели используется процедура из разд. 12.6.2. При этом ограничение можно уменьшить по желанию, увеличивая порядок чистой авторегрессионной модели, используемой в этой процедуре, причем ограничение приближается к нулю при существенно высоком порядке моделей [7].

Данный подход можно распространить на случай векторных измерений, используя результаты работы [13].

12.9. Совместное оценивание состояния и параметров с помощью расширенного фильтра Калмана

Методы идентификации, основанные на использовании фильтра Калмана, можно распространить на случаи систем с шумами на входе и выходе, когда, как в разд. 5.4.2, имеется измеряемый входной сигнал. Эти методы также применимы к задачам

совместного оценивания состояния и параметров и известны как методы расширенного фильтра Калмана.

Поскольку фильтр Калмана сформулирован в терминах линейной модели в пространстве состояний, для использования расширенного фильтра Калмана в нелинейных системах требуется линеаризация относительно каждой предыдущей оценки. В нелинейном случае этот фильтр уже не является оптимальным, так как для него гауссовская постановка задачи не справедлива.

Подобно методам из разд. 12.4 и гл. 9, расширенный фильтр Калмана основан на рассмотрении компонентов вектора параметров в качестве переменных состояния. Существуют различные варианты расширенного фильтра, однако здесь мы рассмотрим только один вариант, основанный на итерациях между оценками параметров и состояния. В этом варианте расширенного фильтра Калмана задача совместного оценивания параметров и состояния решается так, что оценивание параметров производится до оценивания состояния. Затем значения параметров используются для оценивания состояния. При этом состояние можно прогнозировать, как в разд. 12.3 или 12.5. Очевидно, что возможны дальнейшие итерации между оценками параметров и состояния.

Рассмотрим систему с шумом на входе и выходе (случай детерминированного входного сигнала не является основным для анализа на этапе оценивания параметров):

$$\mathbf{x}(k+1) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k), \tag{12.134}$$

где $\mathbf{u}(k)$ — вектор входа, доступный измерению, а $\mathbf{v}(k)$ — вектор белого шума. Предполагается, что вектор состояния $\mathbf{x}(k)$ в уравнении (12.134) известен, как в разд. 12.4. Поскольку вектор $\mathbf{u}$ также известен, уравнение (12.134) можно переписать в форме уравнения (12.50), где

$$\mathbf{X}(k) = [\mathbf{x}^T(k),\ \mathbf{u}^T(k)]^T \tag{12.135}$$

и где матрица $\boldsymbol{\Phi}$ содержит элементы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Следовательно $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ можно получить точно таким же способом, как в разд. 12.4.

Далее в соответствии с процедурой идентификации можно оценить состояние. Так как вектор $\mathbf{u}(k)$ известен и поскольку по оценкам параметров теперь можно вычислить $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, рассмотрим следующую систему уравнений, подобную системе (12.70), (12.71):

$$\mathbf{x}(k+1) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}(k) + \mathbf{U}(k) + \mathbf{v}(k), \tag{12.136}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k), \tag{12.137}$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{y}(k)$ определены, как в разд. 12.5, и

$$\mathbf{U}(k) \triangleq \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}(k), \tag{12.138}$$

$$E[\mathbf{v}(k)] = \mathbf{0}, \tag{12.139}$$

$$E[\mathbf{v}(k)\,\mathbf{v}^T(k)] \triangleq \mathbf{Q}, \tag{12.140}$$

$$E[\mathbf{U}(k)] \neq 0. \tag{12.141}$$

Учитывая уравнение (12.35) и неслучайный характер $\mathbf{U}$, можно записать

$$\mathbf{x}^*(k+1|k) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{D}\,\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1) + \mathbf{U}(k), \tag{12.142}$$

где

$$\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1) \triangleq \mathbf{y}(k) - \mathbf{y}^*(k|k), \tag{12.143}$$

$$\mathbf{y}^*(k|k-1) \triangleq \mathbf{M}\mathbf{x}^*(k|k-1). \tag{12.144}$$

Используя результаты разд. 12.3, имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1|k), \tag{12.145}$$

что идентично уравнению (12.42). Учитывая уравнение (12.122), получим эквивалентное выражение для уравнения (12.43):

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{U}(k) + \mathbf{v}(k) - \boldsymbol{\Phi}^*\mathbf{x}^*(k|k-1) - \mathbf{D}(k)\,\mathbf{y}(k) - \mathbf{U}(k) =$$

$$= (\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{D}\mathbf{M})\,\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{v}(k), \tag{12.146}$$

в котором член $\mathbf{U}(k)$ исчезает. Поскольку для минимизации $\mathbf{P}(k)$:

$$\mathbf{P}(k) \triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k)\,\tilde{\mathbf{x}}^T(k+1|k)]. \tag{12.147}$$

используется матрица коррекции $\mathbf{D}(k)$ из разд. 12.3 и 12.5 и так как $\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k)$ не зависит от $\mathbf{U}(k)$, то определение матриц $\mathbf{D}(k)$, $\mathbf{P}(k)$ и, как следствие, получение оценок $\mathbf{x}^*$ с обратной связью можно выполнить точно так же, как в разд. 12.5. Эту оценку можно затем повторно использовать на этапе оценивания параметров с целью улучшения идентификации.

В линейном гауссовском случае описанный метод обычно не дает состоятельных оценок всех параметров и требует априорного знания порядков. В остальном он сравним с методами из разд. 5.4.2, 12.6 и имеет преимущество перед ними при заданной нестационарности дисперсии. Следовательно, с учетом последнего замечания этим методом можно заменить регрессионный метод идентификации в гауссовской части методов преобразования из разд. 12.6.5 или 12.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wiener N., Extrapolation, Interpolation on Smoothing of Stationary Time Series, MIT Press, Cambridge, Mass., 1966.
2. Levinson N., The Wiener Root-Mean-Square Error Criterion in Filter Design and Prediction, *Jour. Math. and Phys.*, **25**, No. 4, pp. 261—278 (1947).
3. Kalman R., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME, *Jour. Basic Eng.*, 82, pp. 35—45 (1960).
4. Box G. E. P., Jenkins G. M., Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco, 1970. [Русский перевод: Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление.—М.: Мир, 1974.]
5. Mackinney J. G., Algorithm 28/29, *Comm. A. C. M.*, 3, No. 11 (1960).
6. Mayne D. Q., Optimal Non-Stationary Estimation of the Parameters of a Linear System with Gaussian Inputs, *Jour. Elect. Cont.*, **14**, pp. 101—112 (Jan. 1963).
7. Graupe D., Krause D. J., Moore J. B., Identification of Autoregressive Parameters of Time Series, *Trans. IEEE*, **AC-20**, pp. 104—107 (1975).
8. Graupe D., Krause D. J., Sequential Regression Identification Procedure for Predictor and Nonlinear Systems Parameters, Proc. 14th Midwest Symp. on Circuit Theory, Denver, 1971.
9. Graupe D., On Identifying Stochastic Closed Loop Systems, *Trans. IEEE*, **AC-20** (Aug. 1975).
10. Mann H. B., Wald W. A., On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations, *Econometrica*, **11**, pp. 173—200 (1943).
11. Freund J. E., Mathematical Statistics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971.
12. Papoulis A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York, 1967.
13. Graupe D., Identification of Time Series by ARMA Methods, Proc. 5th Pittsburgh Conf. on Modeling and Simulation, pp. 1013—1019, Apr. 1974.
14. Krause D. J., Graupe D., Estimation of the Statistical Parameters of the Kalman-Bucy Filter, Proc. 3rd Symp. on Nonlinear Estimation Theory, pp. 135—137, San Diego, 1972.
15. Mehra R. K., On-Line Identification of Linear Dynamic Systems with Application to Kalman Filtering, *Trans. IEEE*, **AC-16**, pp. 12—21 (1971).

Задачи

1. Используя подход из разд. 12.3, прогнозируйте последовательность $y(t)$ в момент $t+\theta$ при $\theta=4$:

t	14	15	16	17	18	19	20
$y(t)$	0,8372	0,8895	0,89	0,9073	0,9556	0,967	0,9776
t	21	22	23	24	25	26	27
$y(t)$	0,9704	0,9918	1,0151	1,0118	0,9729	0,9538	0,9073
t	28	29	30	31	32	33	34
$y(t)$	0,9098	0,8846	0,8383	0,8096	0,7828	0,7599	0,7076
t	35	36	37	38	39	40	41
$y(t)$	0,6637	0,6227	0,5418	0,4799	0,4064	0,3513	0,2797

t	42	43	44	45	46	47	48
$y(t)$	0,2344	0,1469	0,0881	—0,0114	—0,081	—0,1503	—0,209

t	49	50	51	52	53	54
$y(t)$	—0,2717	—0,3556	—0,4090	—0,4612	—0,5313	—0,609

Сравните результаты прогноза со значениями, полученными из экстраполяции рядом Тейлора кривой, аппроксимирующей измерения. Используйте в обоих случаях одну и ту же аппроксимирующую кривую. Убедитесь, что $y(t)$ — синусоида с наложенным шумом.

2. Идентифицируйте авторегрессионную модель скользящего среднего для следующей временно́й последовательности $x(k)$ при $k=1, 2, 3, \ldots$:

$x(k) =$ 0,0 0,0 1,18, 2,18, 2,35, —1,6, —4,63, —3,06, —0,224, 2,04, 3,16, 2,68, 0,677, 0,074, 0,688, 1,03, 1,43 1,57, 2,31, 1,09, —1,16, —3,56, —3,13, —0,56, 2,03, 2,13, 0,705, 1,66, 1,58, 1,46, —0,466, —2,29, —2,04, —0,238, —0,786, 0,607, —0,03, 0,17, 1,09, 3,72, 2,08, 0,114, —1,21, 1,09, 3,03, 3,88, 2,41, 0,54, —1,63, —3,92, —4,04, —1,88, 2,11, 5,08, 5,41, 2,57, —0,88, —1,88, —2,53, 1,52, 2,03, 0,89, —0,4, 0,15, 1,03, 2,17, 1,51, —0,75, —1,41, 0,01, 0,59, —0,025, —1,37, —0,42, —1,6, —1,52, —0,08, 0,89, —0,04, 0,56, —0,04, —0,65, 0,72, 1,88, 0,33, —1,63, —1,89, —1,83, —0,28, 2,1, 4,37, 3,06, 1,27, —0,27, —2,47, —3,63, —2,56, 0,88, 2,0, 0,395, 0,356, 1,33, 0,81, 0,51, 0,64, 0,9, 0,99, 1,35, 0,17, —1,76, —2,58, —1,43, —0,95, —1,02, —0,36, 1,14, 0,98, —0,36, —1,65, —1,41, —2,26, —1,74, —2,45, —1,45, 1,4, 1,99.

Предположите, что авторегрессионная часть модели имеет второй порядок.

3. Используйте расширенный фильтр Калмана из разд. 12.9 для идентификации модели последовательности, указанной в задаче 2.

4. Решите задачу 3 методом из разд. 12.3.

5. Введите гауссовскую последовательность белого шума из 1000 чисел u_k в линейный фильтр $x_{k+1}=0{,}95x_k-0{,}5x_{k-1}+u_k$ и генерируйте последовательность $y_k=x_k^3$. Идентифицируйте нелинейный предсказатель методом разд. 12.6.5 и используйте первые 900 чисел y_k для дальнейшего прогноза y_k. Решите эту же задачу при помощи линейного фильтра и сравните ошибки прогноза.

13

Чувствительность характеристик к ошибкам идентификации

13.1. Определение чувствительности параметров

При идентификации параметров часто возникают ситуации, когда оценка вектора параметров или матрицы $\hat{\mathbf{p}}$ отличается от фактического вектора или матрицы $\mathbf{p}$ на $\delta\mathbf{p}$ вследствие ошибок идентификации или нестационарности параметров. В связи с этим интересно оценить влияние отличия $\delta\mathbf{p}$ идентифицируемого вектора $\hat{\mathbf{p}}$ от фактического $\mathbf{p}$ на характеристики системы в тех случаях, когда стратегия управления основана на предположении $\hat{\mathbf{p}}=\mathbf{p}$. Рассогласования δJ характеристик имеют особое значение, если необходимо достичь оптимальной величины функционала J^*. Для достижения оптимума необходимо использовать стратегию управления с обратной связью $\mathbf{F}^*(\hat{\mathbf{p}})$, основанную на идентифицируемых параметрах (здесь $\mathbf{F}$ обозначает матрицу коэффициентов усиления обратной связи).

В этом случае обычно необходимо получить ответы на следующие вопросы:

а) Насколько фактический показатель качества $J(\mathbf{p})$ при использовании ошибочной стратегии $F^*(\hat{\mathbf{p}})$ будет отличаться от заданного показателя $J^*(\hat{\mathbf{p}})$, который получается при равенстве вектора $\mathbf{p}$ истинному вектору $\mathbf{p}$ (см. различие $J(\mathbf{p})$ и $J^*(\hat{\mathbf{p}})$ на рис. 13.1)?

б) Насколько можно улучшить величину показателя качества в сравнении с фактической величиной $J(\mathbf{p})$, основанной на использовании ошибочной стратегии управления $\mathbf{F}^*(\hat{\mathbf{p}})$, если известен истинный вектор $\mathbf{p}$, для которого может быть сформулирована оптимальная стратегия $\mathbf{F}^*(\mathbf{p})$, обеспечивающая получение оптимальной величины показателя $J^*(\mathbf{p})$ (см. различие $J(\mathbf{p})$ и $J^*(\mathbf{p})$ на рис. 13.1)?

Ответы на эти вопросы зависят от знания истинного вектора $\mathbf{p}$. Однако можно оценить чувствительность показателя качества к ошибкам $\delta\mathbf{p}$, вычисляя матрицы чувствительности (при

этом предполагается, что вектор $\mathbf{p}$ записан в матричной форме, а не в виде компонентов вектора) при небольших значениях δp:

$$\boldsymbol{\sigma} \triangleq \left.\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}}\right|_{J^*(\hat{\mathbf{p}})} \quad \text{при} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^*(\hat{\mathbf{p}}) = \text{const} \tag{13.1}$$

и

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{p}}. \tag{13.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}^*$ — матрицы чувствительности расчетных и оптимальных характеристик соответственно. Уравнение (13.1) определяет чувствительность в зависимости от различия между расчетной оптимальной величиной критерия $J^*(\hat{\mathbf{p}})$ и фактической величиной, как в приведенном выше случае (а). Уравнение (13.2) определяет чувствительность, связанную с разностью между теоретической оптимальной и фактической величинами, как в случае (б). Отметим, что разность $J^*(\hat{\mathbf{p}}) - J(\mathbf{p})$ не обязательно должна быть отрицательной в случае (а), так как различные системы (с различными векторами $\mathbf{p}$, но с одной и той же стратегией управления) могут иметь либо лучшие, либо худшие характеристики, как это иллюстрирует рис. 13.2 для скалярного случая. В случае (б) разность $J^*(\mathbf{p}) - J(\mathbf{p})$ всегда отрицательна, поскольку истинный (абсолютный) оптимум всегда лучше (в смысле потерь), чем любой другой.

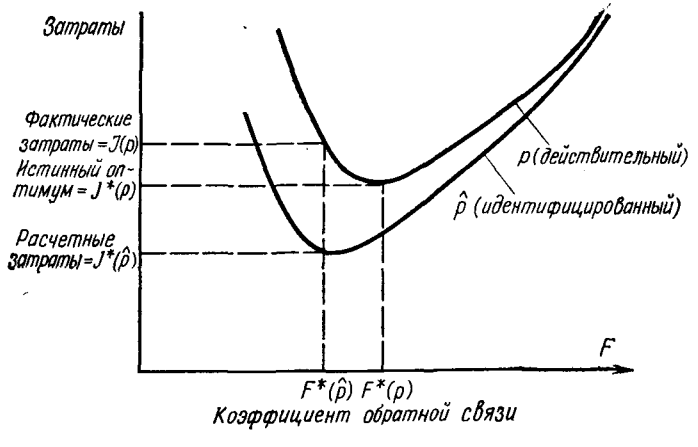


Рис. 13.1. Зависимость показателя качества от стратегии управления и ошибок идентификации (случай скалярного F).

Система $\dot{x} = ax + u$, обратная связь $u = Fx$. Случай (а): $J(p) - J^*(\hat{p}) = ?$ (определение σ); случай (б): $J(p) - J^*(p) = ?$ (определение σ^*).

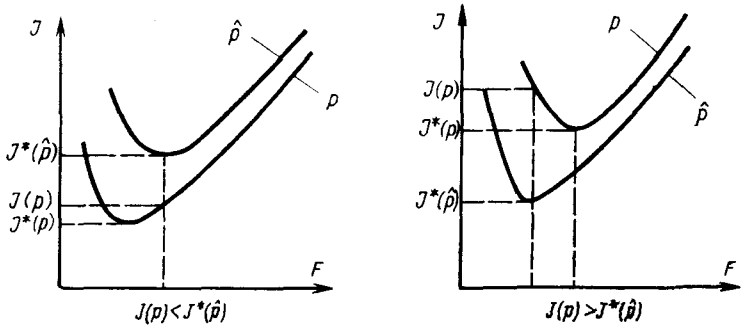


Рис. 13.2. Зависимость показателя качества от обратной связи в скалярном случае.

Очевидно, вычисление чувствительности не всегда связано с оптимальными характеристиками. Тем не менее, поскольку достижение оптимальных характеристик обычно является целью синтеза любой системы, большой интерес представляет определение чувствительности в окрестности оптимума, характеризующей сравнительную эффективность различных стратегий управления. Поэтому ответы на вопросы (а) и (б) показывают, какие параметры необходимо идентифицировать более точно невзирая на дополнительные затраты. Такая информация позволяет направить средства на идентификацию и аппаратурную реализацию туда, где больше всего они оказываются необходимыми. В этом случае можно значительно снизить затраты времени и средств при идентификации как в реальном, так и измененном масштабах времени. Отметим, что если $J(\mathbf{p}) < J^*(\hat{\mathbf{p}})$, то ответ на вопрос (а) не представляет интереса. Однако если $J^*(\hat{\mathbf{p}}) < J(\mathbf{p})$ и если $J^*(\hat{\mathbf{p}})$ — определенное априорное требование к потерям, которое необходимо удовлетворить, то ответ на вопрос (а) может быть важным, особенно в многопараметрическом случае. К тому же вычисление разности $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*$ может показать, дает ли небольшое изменение тех или иных параметров улучшение характеристик.

Анализ, приведенный ниже, выполнен для линейных процессов и характеристик, измеряемых с момента $t=0$ до ∞. Этот случай является *единственным*, когда возможно аналитическое исследование (в случае многих переменных). Такое исследование применительно к нелинейным процессам будет неточным, но тем не менее оно позволяет выявить характер изменения чувствительности, если линеаризация справедлива. Кроме того, результаты для диапазона изменения времени от 0 до ∞ являются пред-

ставительными, если фактический диапазон достаточно длителен в сравнении с динамикой системы. Заметим, что для определения функций чувствительности используются только данные идентификации, тогда как истинный вектор $\mathbf{p}$ предполагается неизвестным.

13.2. Вычисление матриц чувствительности расчетных характеристик

Сначала вычислим матрицу $\boldsymbol{\sigma}$ из уравнения (13.1), связанную с разностью $J(\mathbf{p})-J^*(\hat{\mathbf{p}})$ в случае (а) разд. 13.1 (рис. 13.1), так как это удобно с математической точки зрения [1].

Рассмотрим линейную систему, заданную уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{13.3}$$

при условии, что показатель качества имеет вид

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}\mathbf{u})\, dt. \tag{13.4}$$

Здесь $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ — положительно определенные симметрические весовые матрицы, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — матрицы параметров.

В предположении линейного управления с обратной связью

$$\mathbf{u} = -\mathbf{F}\mathbf{x} \tag{13.5}$$

получим из уравнений (13.3)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\,\mathbf{x}(t) \tag{13.6}$$

и

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{F})t}\,\mathbf{x}_0. \tag{13.7}$$

Подставляя $\mathbf{x}$ из (13.7) в (13.4), получим

$$J = \mathbf{x}_0^T \int_0^\infty e^{\boldsymbol{\omega}^T t}\, \mathbf{M} e^{\boldsymbol{\omega} t}\, dt\, \mathbf{x}_0, \tag{13.8}$$

где

$$\boldsymbol{\omega} \triangleq \mathbf{A} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{F} \tag{13.9}$$

и

$$\mathbf{M} \triangleq \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \mathbf{R}\mathbf{F}. \tag{13.10}$$

Уравнение (13.8) можно записать как

$$J = \operatorname{tr}[\mathbf{S}\mathbf{X}_0], \tag{13.11}$$

где

$$S \stackrel{\Delta}{=} \int_0^\infty e^{\omega^T t} M e^{\omega t} dt \tag{13.12}$$

и

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T, \tag{13.13}$$

а tr[ ] обозначает след матрицы. Уравнение (13.11) дает

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{X}_0 \frac{\partial \operatorname{tr} \mathbf{S}}{\partial \mathbf{A}}. \tag{13.14}$$

Член $\partial J/\partial \mathbf{A}$ в уравнении (13.14) есть расчетная чувствительность, а $\mathbf{X}_0$ представляет собой математическое ожидание $E[\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T]$. Далее под $\mathbf{X}$ и $\partial J/\partial \mathbf{A}$ будем подразумевать соответствующие математические ожидания, не меняя обозначений.

Теперь используем основное свойство матричных уравнений вида

$$\alpha^T \eta + \eta \alpha + \mu = 0, \tag{13.15}$$

а именно что η в уравнении (13.15) определяется в виде [2]

$$\eta = \int_0^\infty e^{\alpha^T t} \mu e^{\alpha t} dt \tag{13.16}$$

для отрицательных вещественных собственных значений α (см. приложение 3). Следовательно, уравнение (13.12) удовлетворяет условию

$$\omega^T \mathbf{S} + \mathbf{S}\omega + \mathbf{M} = 0 \tag{13.17}$$

или, принимая во внимание уравнение (13.9),

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BF})^T \mathbf{S} + \mathbf{S}(\mathbf{A} - \mathbf{BF}) + \mathbf{M} = 0. \tag{13.18}$$

Давая $\mathbf{A}$ приращение $\Delta\mathbf{A}$ и учитывая, что матрица коэффициентов обратной связи $\mathbf{F}$ остается постоянной, как было рассчитано для $\mathbf{A}$, а не для $\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A}$ (т. е. для оптимума $\mathbf{F}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}=\text{const}$ [2]), получим

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{F})^T (\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}) + (\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S})^T (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{F}) + \mathbf{M} = 0. \tag{13.19}$$

После вычитания (13.18) из (13.19) соответственно имеем

$$\Delta\mathbf{A}^T \mathbf{S} + (\mathbf{A} - \mathbf{BF})^T \Delta\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{S}\Delta\mathbf{A} = 0. \tag{13.20}$$

Очевидно, уравнение (13.20) по форме совпадает с уравнением (13.15), если обозначить

$$\mathbf{A} - \mathbf{BF} \stackrel{\Delta}{=} \alpha, \tag{13.21}$$

$$\Delta \mathbf{S} \triangleq \boldsymbol{\eta}, \tag{13.22}$$

$$\Delta \mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} \triangleq \boldsymbol{\mu}. \tag{13.23}$$

С учетом выражения (13.16) получим

$$\Delta \mathbf{S} = \int_0^\infty e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BF})^T t} \left[\Delta \mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \Delta \mathbf{A}\right] e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BF})t} \, dt. \tag{13.24}$$

Используя лемму Клейнмана [3], по которой

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \operatorname{tr} \mathbf{S} \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \operatorname{tr} \Delta \mathbf{S} \mathbf{X}_0}{\partial \Delta \mathbf{A}}, \tag{13.25}$$

а также учитывая, что матрицы **A**, **B**, **F**, **M** и **S** не зависят от $\Delta \mathbf{A}$, из уравнений (13.24) и (13.25), согласно правилу дифференцирования матриц, как указано в приложении 2, получим следующее выражение:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = \int_0^\infty e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BF})t} \, 2\mathbf{X}_0 \, e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BF})^T t} \, dt. \tag{13.26}$$

Обозначая

$$\boldsymbol{\Gamma} \triangleq \int_0^\infty e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BF})t} 2\mathbf{X}_0 e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BF})^T t} \, dt \tag{13.27}$$

и учитывая, что уравнение (13.26) имеет форму уравнения (13.16), получим

$$\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{X}_0 = 0 \tag{13.28}$$

и

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{S} \boldsymbol{\Gamma}. \tag{13.29}$$

Подобное же выражение получается и для $\partial J / \partial \mathbf{B}$.

Напомним, что в данной главе нас интересует чувствительность в окрестности оптимума J. Для этого случая оптимальная матрица **S**, т. е. **S***, получается, если уравнение (13.18) рассмотреть в приращении по $\Delta \mathbf{F}$:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BF})^T \Delta \mathbf{S} + \Delta \mathbf{S} (\mathbf{A} - \mathbf{BF}) - \Delta \mathbf{F}^T \mathbf{B}^T \mathbf{S} -$$

$$- \mathbf{SB} \Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}^T \mathbf{RF} + \mathbf{F}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{F} = 0. \tag{13.30}$$

Так как уравнение (13.30) подобно по форме уравнению (13.15), то получаем

$$\Delta S = \int_0^\infty e^{\omega^T t}\left[\Delta F^T\left(RF - B^T S\right) + \left(F^T R - SB\right)\Delta F\right] e^{\omega t}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{\omega^T t}\left[\Delta F^T\left(RF - B^T S\right) - \left(RF - B^T S\right)^T \Delta F\right] e^{\omega t}\, dt \quad (13.31)$$

и

$$\Delta J = \operatorname{tr}\left[\Delta S \cdot X_0\right]. \quad (13.32)$$

Согласно лемме Клейнмана, оптимум определяется из условия

$$\frac{\partial J}{\partial F} = \frac{\partial \Delta J}{\partial \Delta F} = 0, \quad (13.33)$$

которое удовлетворяется при использовании матрицы коэффициентов обратной связи:

$$F^* = R^{-1} B^T S^*, \quad (13.34)$$

где матрицы S^*, F^* соответствуют оптимуму. Подставляя $F=F^*$ из (13.34) в уравнение (13.18), получим следующее алгебраическое матричное уравнение Риккати для нахождения оптимальной матрицы $S=S^*$:

$$A^T S^* + S^* A + Q - S^* B R^{-1} B^T S^* = 0. \quad (13.35)$$

Следовательно, матрицу чувствительности σ в окрестности F^* можно определить, решая два матричных уравнения, т. е. *алгебраическое матричное уравнение Риккати* (13.35) для вычисления оптимальной матрицы S и *линейное матричное уравнение* (13.28) для оценивания матрицы Γ при известной матрице S (см. решение задачи 1, гл. 13). Отметим, что при оптимизации J матрицу S^* можно определить независимо от анализа чувствительности. Таким образом, для определения матрицы чувствительности σ необходимо решать только дополнительное линейное матричное уравнение (т. е. систему совместных линейных уравнений для элементов матрицы Γ).

Очевидно, что элементы матриц $\partial J/\partial A$ и $\partial J/\partial B$ являются такими же, как в матрице $\partial J/\partial p$. Вычислить матрицу Γ можно только, если известны матрицы A, B. Если матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$ в оценке $\hat{p}$, которые являются результатом процедуры идентификации, подставить вместо A, B из уравнений (13.3) в уравнение (13.35) и если ∂A, ∂B не слишком велики, то получаем искомую матрицу чувствительности σ из уравнения (13.1).

Пример 13.1

Рассмотрим систему, заданную уравнением $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u$ с математическим ожиданием $E[\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T]=\mathbf{I}$, где матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ есть

$$\hat{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

и где $J=\int_0^\infty(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})\,dt$ при $\mathbf{Q}=\mathbf{I}$, $\mathbf{R}=1$. Система управляется по линейному закону $u=-\mathbf{F}\mathbf{x}$, $\mathbf{F}=[1, 1]$. (Отметим, что, хотя нас интересует обычно оптимальная стратегия управления, выводы из разд. 13.2 действительны для любого линейного управления с обратной связью и позволяют найти матрицу чувствительности относительно некоторого не обязательно оптимального показателя качества J). Из уравнения (13.29) получаем $\partial J/\partial\mathbf{A}=\mathbf{S}\boldsymbol{\Gamma}$, где матрица $\mathbf{X}_0$ принята равной $\mathbf{I}$, а $\boldsymbol{\Gamma}$ определяется из уравнения (13.28) следующим образом:

$$\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[1,\ 1]\right\}\boldsymbol{\Gamma}+\boldsymbol{\Gamma}\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[1,\ 1]\right\}^T+2\mathbf{I}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}+\boldsymbol{\Gamma}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}+2\mathbf{I}=\mathbf{0}.$$

Так как матрица $\mathbf{S}$ удовлетворяет уравнению (13.18), то получаем

$$\begin{bmatrix}-0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}\mathbf{S}+\mathbf{S}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}+\mathbf{I}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

Учитывая симметрию $\mathbf{S}$, переходим от матричного уравнения к линейной однородной системе уравнений:

$$\begin{bmatrix}-3S_{12}, & -3S_{22}\\ S_{11}-4S_{12}, & S_{12}-4S_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3S_{12}, & S_{11}-4S_{12}\\ -3S_{22}, & S_{12}-4S_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

$$-6S_{12}+2=0,\quad S_{12}=\frac{1}{3},$$

$$2S_{12}-8S_{22}+2=0,\quad S_{22}=\frac{1}{3},$$

$$S_{11}-4S_{12}-3S_{22}+1=0,\quad S_{11}=\frac{4}{3}.$$

Кроме того, матричное уравнение

$$\begin{bmatrix}-3\Gamma_{12}, & -3\Gamma_{22}\\ \Gamma_{11}-4\Gamma_{12}, & \Gamma_{12}-4\Gamma_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\Gamma_{12}, & \Gamma_{11}-4\Gamma_{12}\\ -3\Gamma_{22}, & \Gamma_{12}-4\Gamma_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

можно также представить системой однородных линейных уравнений:

$$-6\Gamma_{12}+2=0, \quad \Gamma_{12}=\frac{1}{3},$$

$$2\Gamma_{12}-8\Gamma_{22}+2=0, \quad \Gamma_{22}=\frac{1}{3},$$

$$\Gamma_{11}-4\Gamma_{12}-3\Gamma_{22}=0, \quad \Gamma_{11}=\frac{7}{3}.$$

Очевидно, для оптимального управления получение матрицы $\mathbf{S}=\mathbf{S}^*$ (а следовательно, и оптимальной матрицы $\mathbf{F}=\mathbf{F}^*$) является существенной задачей независимо от анализа чувствительности. Если матрица $\mathbf{S}^*$ получена таким образом, то уравнение (13.28) оказывается линейным относительно Γ_{ij} и его решение непосредственно получается, как это показано в последнем шаге вычислений в настоящем примере.

13.3. Вычисление матриц чувствительности для оптимального показателя качества

Решая совместно уравнения (13.1) и (13.2), получим

$$\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}\delta\mathbf{p}^T] = J(\mathbf{p}) - J^*(\hat{\mathbf{p}}) \tag{13.36а}$$

и

$$\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^*\delta\mathbf{p}^T] = J(\mathbf{p}) - J^*(\mathbf{p}), \tag{13.36б}$$

где $J(\mathbf{p})$ — фактический показатель качества, $J^*(\hat{\mathbf{p}})$ — расчетный оптимальный показатель качества в предположении $\hat{\mathbf{p}}=\mathbf{p}$, а $J^*(\mathbf{p})$ обозначает реально достижимый оптимум.

Уравнения (13.36а), (13.36б) дают

$$\operatorname{tr}[(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^*)\delta\mathbf{p}^T] = J^*(\mathbf{p}) - J^*(\hat{\mathbf{p}}). \tag{13.37}$$

Обозначим

$$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^* \stackrel{\Delta}{=} \boldsymbol{\Sigma}^*. \tag{13.38}$$

Так как матрица $\boldsymbol{\sigma}$ была уже получена (в разд. 13.2), $\boldsymbol{\sigma}^*$ теперь определяется аналитически, если определить $\boldsymbol{\Sigma}^*$ следующим образом [1].

Предполагая, что $J^*(\hat{\mathbf{p}})$ — *оптимальное* значение J из уравнения (13.8) для идентифицированных матриц $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, представим уравнение (13.35) в виде

$$\hat{\mathbf{A}}^T\hat{\mathbf{S}}^* + \hat{\mathbf{S}}^*\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{Q} - \hat{\mathbf{S}}^*\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\hat{\mathbf{S}}^* = \mathbf{0}, \tag{13.39}$$

откуда определим оптимальный показатель качества:

$$J^{*}_{\underset{p}{\wedge}} = J^{*}(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = J^{*}(\hat{\mathbf{p}}) = \operatorname{tr}[\hat{\mathbf{S}}\mathbf{X}_0], \tag{13.40}$$

$$\mathbf{X}_0 \triangleq E(\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T). \tag{13.41}$$

Если матрице $\hat{\mathbf{F}}$ дать приращение $\Delta\mathbf{F}$ и обозначить $\hat{\mathbf{F}}+\Delta\mathbf{F}$ через $\mathbf{F}$, то новый показатель качества будет иметь вид $J^{*}_{\hat{p}}(\hat{\mathbf{F}}+\Delta\mathbf{F})$ и удовлетворять уравнению (13.18) в приращениях:

$$[\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{F}} + \Delta\mathbf{F})]^T(\hat{\mathbf{S}}^* + \Delta\mathbf{S}') + (\hat{\mathbf{S}}^* + \Delta\mathbf{S}')[\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{F}} + \Delta\mathbf{F})] + \\ + \mathbf{Q} + (\hat{\mathbf{F}} + \Delta\mathbf{F})^T\mathbf{R}(\hat{\mathbf{F}} + \Delta\mathbf{F}) = 0, \tag{13.42}$$

так что

$$J^{*}_{\underset{p}{\wedge}}(\hat{\mathbf{F}} + \Delta\mathbf{F}) = \operatorname{tr}[(\hat{\mathbf{S}}^* + \Delta\mathbf{S}')\mathbf{X}_0]. \tag{13.43}$$

Вычитая уравнение (13.39) из (13.42) и отбрасывая члены второго порядка от $\Delta\mathbf{F}$, $\Delta\mathbf{S}'$, получим

$$\Delta\mathbf{S}'(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{F}}) + (\hat{\mathbf{A}}^T - \hat{\mathbf{F}}^T\hat{\mathbf{B}}^T)\Delta\mathbf{S}' + \Delta\mathbf{F}^T(\mathbf{R}\hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{B}}^T\hat{\mathbf{S}}^*) + \\ + (\hat{\mathbf{F}}^T\mathbf{R} - \hat{\mathbf{S}}^*\hat{\mathbf{B}})\Delta\mathbf{F} = 0. \tag{13.44}$$

Уравнение (13.44) записано в форме уравнения (13.15). Однако если матрице $\hat{\mathbf{A}}$ дать приращение $\Delta\mathbf{A}$, то матрица $\mathbf{S}$ из (13.44) становится равной $\hat{\mathbf{S}}^*+\Delta\mathbf{S}_A=\hat{\mathbf{S}}^*+\Delta\mathbf{S}$. Тогда из уравнения (13.34) имеем

$$\Delta\mathbf{S}' = -\int_0^{\infty} e^{\omega^T t}(\Delta\mathbf{F}^T\mathbf{B}\Delta\mathbf{S} + \mathbf{B}^T\Delta\mathbf{S}\Delta\mathbf{F})e^{\omega t}\,dt \tag{13.45}$$

и

$$\Delta\mathbf{S}_A = \Delta\mathbf{S}|_{\mathbf{F}=\text{const},\,\Delta\mathbf{A}}. \tag{13.46}$$

Учитывая (13.25), получим из уравнения (13.46)

$$\frac{\partial J^{**}}{\partial\mathbf{F}} = \frac{\partial \operatorname{tr}\Delta\mathbf{S}'\mathbf{X}_0}{\partial\Delta\mathbf{F}} = -2\mathbf{B}^T\Delta\mathbf{S}_{\mathbf{A}}\int_0^{\infty} e^{\omega t}\mathbf{X}_0 e^{\omega^T t}\,dt = -2\mathbf{B}^T\Delta\mathbf{S}_{\mathbf{A}}\Gamma, \tag{13.47}$$

где ∂J^{**} обозначает разность между $J^{*}(\hat{\mathbf{p}})$ и $J^{*}(\mathbf{p})$, связанную с Σ^{*}, как показано на рис. 13.1. Тогда с помощью (13.29) и (13.38) получим $\Delta J^{*}=J(\mathbf{p})-J^{*}(\hat{\mathbf{p}})$:

$$\Delta J^{*} = \operatorname{tr}(\mathbf{S}\Gamma\Delta\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B}^T\Delta\mathbf{S}_{\mathbf{A}}\Gamma\Delta\mathbf{F}^T), \tag{13.48}$$

где, согласно уравнениям (13.20), (13.34),

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\Delta\mathbf{S}_{\mathbf{A}}. \qquad (13.49)$$

Последнее уравнение является *линейным* относительно $\Delta\mathbf{A}$. Поэтому, если матрица $\mathbf{S}^*$ известна, уравнение (13.48) дает

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{A}} = \hat{\mathbf{S}}^*\boldsymbol{\lambda} = 4\hat{\mathbf{S}}^*\int_0^\infty e^{\omega t}\left(\frac{\mathbf{X}_0}{2} - \mathbf{B}\Delta\mathbf{F}\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\Gamma}\Delta\mathbf{F}^T\mathbf{B}^T\right)e^{\omega^T t}\,dt, \qquad (13.50)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ вычисляется так же, как $\hat{S}^*$ и $\boldsymbol{\Gamma}$. Подобно выводу разд. 13.2, из уравнений (13.36) и (13.50) получим $\partial J^*/\partial\mathbf{B}$ для облегчения вычисления матрицы чувствительности $\boldsymbol{\sigma}^*$, тогда как матрица $\boldsymbol{\Sigma}^*$ получается путем непосредственного решения уравнения (13.47) относительно $\Delta\mathbf{A}$ и $\Delta\mathbf{B}$.

Очевидно, что матрицу $\boldsymbol{\Sigma}^*$ необходимо знать не только для определения $\boldsymbol{\sigma}^*$, но и для того, чтобы выявить отличие расчетного оптимума от действительно возможного. Кроме того, вычисление $\boldsymbol{\Sigma}^*$ может показать, какие параметры $\mathbf{p}$ оказывают наибольшее влияние на значение J в области оптимума и как их изменять для получения оптимального значения.

В заключение подчеркнем, что при анализе чувствительности для вычисления $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^*$, $\boldsymbol{\Sigma}^*$ необходимо решение только двух линейных матричных уравнений в предположении, что матрица $\mathbf{S}^*$ так или иначе известна, если определяется оптимальный показатель качества J [4].

Пример 13.2

Дальнейшее исследование чувствительности идентификации и соотношений между затратами и стратегией управления можно произвести на примере следующей одномерной системы:

$$\dot{x} = ax + bu, \quad E[x(0)] = 0, \quad E[x^2(0)] = P_0,$$

принимая показатель качества в форме $J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (Cx^2 + Du^2)\,dt$.

Оптимальная обратная связь для этой системы задается соотношением $u = -kx$, где k получается подстановкой $u = -kx$ в выражение для показателя J, приведенное выше, и определением k из уравнения $\partial J/\partial k = 0$:

$$k = \frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{C}{D}}.$$

При таком значении k получим уравнение

$$\dot{x} = \pm\sqrt{a^2 + \frac{b^2C}{D}}\,x.$$

Так как уравнение

$$\dot{x} = +\sqrt{a^2 + \frac{b^2 C}{D}}\, x$$

неустойчиво, то, очевидно, оптимальным значением k будет

$$k = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{C}{D}}.$$

Тогда оптимальный показатель качества (см. рис. 13.1) определяется выражением $J^* = -(C + k^2 D) P_0 / 4(a - bk)$.

Элементы матрицы чувствительности $\boldsymbol{\sigma}$ для последней системы, таким образом, определяются в виде

$$\left.\frac{\partial J}{\partial a}\right|_{k=k^*} = \frac{C + k^2 D}{4(a - bk)^2} P_0 = \sigma_1.$$

Подобным же образом из $\partial J / \partial b_{k=k^*}$ определяется σ_2 для формирования матрицы $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2]^T$. Кроме того, для рассматриваемой системы получаются матрицы чувствительности $\boldsymbol{\sigma}^*$ путем вычисления $\boldsymbol{\Sigma}^*$ в соответствии с разд. 13.3. Подставляя $a/b + \sqrt{a^2/b^2 + C/D}$ вместо k в выражение для J^*, имеем

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{P_0}{\sqrt{a^2 + \frac{Cb^2}{D}}}.$$

Принимая во внимание уравнение (13.50), получим

$$\frac{\partial J^*}{\partial a} = \frac{-DJ^* + 4b^2 \sigma_1^2 \Delta a / P_0}{D(a - bk)}.$$

Подобным же образом из $\partial J^* / \partial b$ получим σ_2^* для формирования матрицы $\boldsymbol{\sigma}^* = [\sigma_1^*, \sigma_2^*]^T$. Учитывая уравнение (13.38), находим $\boldsymbol{\Sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*$. Таким образом, матрицы $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^*$ и $\boldsymbol{\Sigma}^*$ определяются через a, b из матриц $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$. Следовательно, если параметры a, b идентифицированы, то влияние отклонения идентифицированных параметров a, b от истинных на показатель качества в области оптимума определяется легко.

13.4. Экспериментальное определение матриц чувствительности

В нелинейных системах, к которым неприменима линеаризация, а также в линейных системах, когда характеристики предполагается исследовать только на конечных интервалах (т. е. $J = \int_0^{t_f} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt$), требуется экспериментальное определение ма-

триц чувствительности. Матрицы можно определить путем вычисления оптимального значения $J^*(\hat{\mathbf{p}})$ при известной оценке $\hat{\mathbf{p}}$. Оптимальное значение затем пересчитывается для гипотетических систем с параметрами $\hat{\mathbf{p}}+\Delta\mathbf{p}_i$, $\forall\ i=1,\ldots, v$, где v — количество элементов матрицы $\hat{\mathbf{p}}$. Элементы матриц чувствительности определяются из $J^*(\hat{\mathbf{p}}+\Delta\mathbf{p}_i)-J^*(\hat{\mathbf{p}})$, где соотношение

$$\frac{J^*(\mathbf{p}+\Delta p_i)-J^*(\mathbf{p})}{\Delta p_i} \tag{13.51}$$

описывает i-й элемент матрицы чувствительности, которая записывается через элементы вектора $\mathbf{a}$ (если $\mathbf{p}$ является вектором).

Многочисленные вычисления оптимума, необходимые для определения матриц, потребуют, очевидно, больших затрат времени, что указывает на преимущество методов разд. 13.2, 13.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bobrovsky B. Z., Graupe D., Analysis of Optimal-Cost Sensitivity to Parameter Changes, *IEEE Trans.*, **AC-16**, Oct., pp. 487—488 (1971).
2. Levine W. S., Athans M., On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems, *IEEE Trans.*, **AC-15**, pp. 44—48 (1970).
3. Kleinman D. I., Suboptimal Design of Linear Regulator Systems Subject to Computer Storage Limitations, MIT Electronic Systems Lab. Rept. LSL-R-297, Cambridge, Mass., 1967.
4. Lee R. C. K., Optimal Estimation, Identification and Control, MIT Press, Cambridge, Mass., 1964. [Русский перевод: Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. — М.: Наука, 1966.]

Задачи

1. Вычислите $\partial J/\partial\mathbf{A}$ по уравнению (13.29) для системы $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$. Матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ идентифицированы в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{Q}=\mathbf{I},\quad \mathbf{R}=1,\quad \mathbf{X}=E\left[\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T\right]=\mathbf{I}.$$

2. Определите $\partial J/\partial\mathbf{B}$ подобно $\partial J/\partial\mathbf{A}$ в уравнении (13.29).

3. Вычислите $\partial J^*/\partial\mathbf{A}$ для системы из задачи 1.

4. Определите $\partial J^*/\partial\mathbf{B}$ подобно $\partial J^*/\partial\mathbf{A}$.

14

Заключительные замечания

В заключение книги уместно сделать некоторые общие замечания относительно достоинств и применимости различных методов идентификации.

Предполагая применить тот или иной метод идентификации для решения определенной задачи, необходимо рассмотреть его в некоторых основных аспектах. Эти аспекты относятся прежде всего к классификации задачи в рамках определений, которые рассматривались в гл. 1.

Кроме того, весьма важно использовать как можно больше априорных данных и оценивать результаты идентификации с учетом этих данных. При этом не только целесообразно, но также практически важно использовать самый простой метод, учитывая трудности вычислений. Это требование особенно важно для случая идентификации в реальном масштабе времени, когда экономия затрат времени на вычисления может привести к ухудшению управления. Это соображение также способствует уменьшению ошибок вычислений, которые возрастают с усложнением задачи. Очевидно, что если простой метод идентификации оказывается недостаточно точным, то может потребоваться более сложный метод. Если выбранный метод идентификации позволяет использовать специальные сигналы, как в гл. 3 и 4, то это дает возможность произвести идентификацию быстрее и точнее. С другой стороны, последовательные методы, вероятно, будут наилучшими с точки зрения быстродействия и вычислительных сложностей. Соображения простоты метода указывают на методы последовательного обучения и стохастической аппроксимации, тогда как из условий сходимости целесообразно использовать последовательную регрессию по методу наименьших квадратов, которая дает эффективные оценки, если шум можно представить в виде гауссовского белого шума. В этом случае реализуются свойства максимального правдоподобия. По возможности следует избегать методов, в которых необходимо производить обращение матриц, так как ошибки вычисления матриц являются источником постоянных забот всех программистов в любых задачах идентификации и управления. Это также ука-

зывает на целесообразность применения методов последовательной идентификации. Упомянутые выше соображения распространяются как на линейные, так и на нелинейные процессы, которые могут быть непрерывными или дискретными. Они также справедливы для нестационарных процессов, для которых можно применить методы последовательного обучения или последовательной регрессии, рассмотренные в гл. 6, 7 и 12[1].

Методы инвариантного погружения целесообразно использовать в основном для нелинейных систем, когда оцениваются как состояние, так и параметры. Применение этих методов, однако, требует некоторого обоснованного начального приближения к величинам параметров (обычно в диапазоне от 2 до 0,5 относительно истинной величины) и порядку величин других начальных условий для обеспечения соответствующей сходимости. В тех случаях, когда необходимо произвести совместное оценивание состояния и параметров линейных систем, алгоритм фильтрации по методу расширенного фильтра Калмана и метод смешанной авторегрессионной модели скользящего среднего из гл. 12 могут иметь преимущества перед методом инвариантного погружения, особенно в тех случаях, когда нет априорной информации. Использование метода смешанной авторегрессионной модели со скользящим средним в этих случаях имеет преимущество перед упомянутыми выше двумя методами с точки зрения скорости вычислений и простоты, особенно если порядок системы также неизвестен и рассматриваются гауссовские последовательности.

Методы идентификации с прогнозом могут найти основное применение в нестационарных случаях, когда единственной целью является адекватное управление и не требуется постановка задачи в пространстве состояний или с использованием аппарата передаточных функций. Основной недостаток этих методов заключается в том, что на каждом интервале управления необходимо производить прогноз, что вызывает увеличение затрат машинного времени и усложнение программы вычислений. Однако для нестационарных систем, в которых производятся измерения только входа и показателя качества системы управления, методы идентификации с прогнозом могут оказаться целесообразными.

В тех случаях, когда размерность вектора состояния неизвестна, модели в пространстве состояний приходится строить с помощью аппарата передаточных функций и путем дальнейшего преобразования. При построении авторегрессионных моделей скользящего среднего необходимо принимать во внимание, что

---

[1] Метод последовательного обучения и метод регрессии по наименьшим квадратам сходятся также в случае неустойчивых процессов, как отмечалось в гл. 7.

общие корни полинома авторегрессии и полинома скользящего среднего взаимно компенсируются.

Идентификацию параметров линейных моделей временны́х последовательностей в пространстве состояний для целей последовательного прогноза при отсутствии информации о параметрах уравнений состояния можно выполнить с помощью модифицированного фильтра Калмана (алгоритма оценивания Мейна). Идентификация смешанной авторегрессионной модели скользящего среднего для временны́х последовательностей при помощи метода, основанного на последовательной регрессии (или с использованием методов гл. 7, когда не требуется высокая сходимость), применима к тем случаям, когда необходим прогноз данных измерений и нет или не требуется информации о состоянии. В этом случае получаются состоятельные и почти эффективные оценки параметров и порядков моделей в форме дискретных передаточных функций для стационарных и некоторых нестационарных последовательностей или систем. Смешанная авторегрессионная модель скользящего среднего дает оптимальное линейное прогнозирование результатов измерений неизвестных параметров и порядков моделей путем восстановления входа, в отличие от метода фильтра Калмана, в котором должны быть известны параметры и порядок модели и в котором вместо восстановления производится последовательное вычисление коэффициентов ошибок. По завершении идентификации авторегрессионную модель скользящего среднего можно преобразовать в модель в пространстве состояний, как в разд. 2.5, чтобы построить модель для прогнозирования с помощью методов калмановской фильтрации, исключая при этом необходимость восстановления входа. Метод фильтра Калмана и авторегрессионная модель скользящего среднего дают оптимальное предсказание гауссовских последовательностей, причем с помощью первого метода также непосредственно фильтруется шум измерений. Оба указанных метода (а также методы, рассмотренные в гл. 8 и 9) можно объединить с процедурами преобразования из разд. 12.6.5 для того, чтобы идентифицировать параметры оптимальных предсказателей некоторых негауссовских последовательностей.

Задачи фильтрации можно сформулировать как задачи предсказания, к которым также применимы методы идентификации из гл. 12 (особенно из разд. 12.8). Указанные выше два метода можно распространить на однородные нестационарные процессы (разд. 12.7). Однако расширенный фильтр Калмана не позволяет провести несмещенную и состоятельную идентификацию одновременно всех параметров.

Основная цель анализа чувствительности, проведенного в гл. 13, состоит в том, чтобы показать, какие параметры (линейной) системы требуют наибольших усилий по идентификации.

Такая информация о чувствительности может быть использована для ускорения процесса идентификации параметров, имеющих низкие коэффициенты чувствительности.

Здесь могут оказаться полезными замечания, разъясняющие связь между основными типами фильтров и процессов. В гл. 12 уже отмечалось, что дискретный предсказатель Винера фактически является чистой (идеально бесконечной) авторегрессионной моделью, которая, следовательно, эффективно идентифицируема.

Смешанная авторегрессионная модель скользящего среднего непосредственно связана с фильтром Винера, однако она имеет минимальное число параметров. Калмановский предсказатель, который путем преобразования может быть связан с авторегрессионным предсказателем скользящего среднего, также имеет минимальное число параметров. Кроме того, как было показано, два последних типа предсказателя непосредственно связаны с понятиями передаточных функций и пространства состояний.

Коснемся далее понятия эффективной, состоятельной и несмещенной идентификации. Хотя эффективная идентификация не должна сопровождаться, насколько это возможно, усложнением вычислений, необходимо всегда иметь в виду, что последовательная, состоятельная и асимптотически несмещенная идентификация обычно является вполне удовлетворительной, так как процедура сходится к истинным параметрам.

Вновь подчеркнем, что идентификация динамических параметров по данным измерений невозможна, если в измерениях отсутствуют переходные процессы. Поэтому ни один метод не позволяет провести динамическую идентификацию по данным об установившемся состоянии.

Подчеркнем также, что для идентификации параметров нелинейных систем необходимо иметь соответствующую нелинейную формализацию задачи или метод аппроксимации, так как существует бесконечное число нелинейных функций и параметров, которые аппроксимируют одну функцию измерений, но не являются наилучшими для другой нелинейной функции.

Общие соображения, высказанные в этой главе, основаны на субъективном опыте и наблюдениях автора. Они могут служить в качестве руководства для читателя при сравнительной оценке методов. Для более глубокого анализа рекомендуется применять различные методы при решении конкретных задач. Дополнительную информацию можно получить, если просмотреть научную литературу по идентификации и ее приложениям. Эта литература касается методов, рассмотренных в данной книге, и некоторых других методов, которые могут быть получены на основании методов, изложенных в гл. 3—13.

Отмечая, что все методы идентификации, которые применяются на практике, в том числе те, которые рассматриваются в этой книге, должны основываться на измеряемых явлениях, следует вспомнить слова Иммануила Канта: «Мы можем познавать предмет не как вещь в себе, а лишь постольку, поскольку он объект чувственного содержания, т. е. как явление» («Критика чистого разума», 1781 г.).

Приложение 1

Линеаризация нелинейных процессов

Нелинейный процесс можно линеаризовать относительно некоторого рабочего состояния, если на вход подать небольшие возмущения. На вход такой линеаризованной системы можно подавать сигналы идентификации, рассматриваемые в гл. 3, 4, 10, если входные сигналы поддерживаются достаточно малыми. Линеаризованные характеристики нелинейного процесса при малых возмущениях получаются следующим образом.

Рассмотрим нелинейный процесс

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{П-1.1}$$

где $\mathbf{f}$ — $(n \cdot 1)$-мерная вектор-функция $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, а $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ — $(n \cdot 1)$-мерный вектор состояния и $(m \cdot 1)$-мерный вектор управления соответственно. Если предположить, что векторам $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ даны малые приращения, то получим

$$\dot{\mathbf{x}} + \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} : \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}). \tag{П-1.2}$$

Вычитая уравнение (П-1.1) из (П-1.2), имеем

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x},\ \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}_0} \delta\mathbf{x} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{u}}\right]_{\mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}_0} \delta\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{П-1.3}$$

где $[...]_{\mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}_0}$ обозначает $[...]$ в окрестности $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{u}_0$, а T — знак транспонирования.

Определим

$$\mathbf{A}^T = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{П-1.4}$$

как $(n \cdot n)$-мерную матрицу и

$$\mathbf{B}^T \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_m} & & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \qquad \text{(П-1.5)}$$

как $(n \cdot m)$-мерную матрицу.

Тогда из уравнения (П-1.3) следует линеаризованное уравнение при малых возмущениях:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}. \qquad \text{(П-1.6)}$$

Величины $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}$, $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}$ определяются далее в приложении 2.

Пример

Рассмотрим нелинейный процесс

$$\dot{x}_1 = 2x_1^2 + 3x_1 u,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 + u^3.$$

При малых возмущениях этот процесс можно описать следующим образом, используя обычные правила нахождения скалярной частной производной:

$$\delta\dot{x}_1 = (2x_{1,0} + 3u_0)\,\delta x_1 + 3x_{1,0}\,\delta u,$$
$$\delta\dot{x}_2 = x_{2,0}\,\delta x_1 + x_{1,0}\,\delta x_2 + 3u_0^2\,\delta u,$$

или в векторной форме

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2x_{1,0} + 3u_0, & 0 \\ x_{2,0}, & x_{1,0} \end{bmatrix} \delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3x_{1,0} \\ 3u_0^2 \end{bmatrix} \delta\mathbf{u} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + B\delta\mathbf{u}.$$

Видно, что функция $\mathbf{f}$ исходной системы определяется выражением

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_1 u \\ x_1 x_2 + u^3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{2x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1, & 0 \\ x_2, & x_1 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{A},$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3u_2 \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{B}.$$

Таким образом, получаем матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, такие же, как и матрицы, вычисленные путем соответствующего скалярного дифференцирования уравнения нелинейного процесса.

Приложение 2

Дифференцирование следа матричной функции

Анализ, проведенный ниже, основан на процедурах получения градиентов, описанных Клейнманом и Этансом в работах [8, 9] гл. 5.

Будем рассматривать скаляр J, являющийся функцией некоторой матрицы размера $n \cdot m$. Градиент J по $\mathbf{x}$ определяется в виде

$$\nabla \mathbf{J}_x \triangleq \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial x_{1m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial x_{n1}} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial x_{nm}} \end{bmatrix}, \tag{П-2.1}$$

где

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{m1} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}. \tag{П-2.2}$$

Если J — след матрицы, то эта матрица является функцией $\mathbf{x}$, а градиент $\partial J/\partial \mathbf{x}$ оказывается градиентом по этому следу. Выражение для градиента можно получить путем трудоемкого ручного дифференцирования, используя уравнение (П-2.1). Некоторые из наиболее распространенных выражений для градиента даны в работе [9] гл. 5 этой книги. Достаточно полный перечень выражений для градиента приведен ниже (в предположении, что след существует):

$$\frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I}, \tag{П-2.3}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{Ax})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T, \tag{П-2.4}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\mathbf{Ax}^T\right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}, \tag{П-2.5}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{AxB})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T, \tag{П-2.6}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\mathbf{Ax}^T\mathbf{B}\right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{BA}, \tag{П-2.7}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}\right)}{\partial \mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)\mathbf{x}, \tag{П-2.8}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\mathbf{xAx}^T\right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right), \tag{П-2.9}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\mathbf{AxBx}\right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{B}^T\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T, \tag{П-2.10}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\mathbf{AxBx}^T\right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{AxB} + \mathbf{A}^T\mathbf{xB}^T, \tag{П-2.11}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\mathbf{Axx}^T\mathbf{B}\right)}{\partial \mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{BA}\right)\mathbf{x}, \tag{П-2.12}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(e^{\mathbf{x}}\right)}{\partial \mathbf{x}} = e^{\mathbf{x}^T}, \tag{П-2.13}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left[\det|\mathbf{x}|\right]}{\partial \mathbf{x}} = \det|\mathbf{x}|\left(\mathbf{x}^{-1}\right)^T, \tag{П-2.14}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left[\det|\mathbf{AxB}|\right]}{\partial \mathbf{x}} = \det|\mathbf{AxB}|\left(\mathbf{x}^{-1}\right)^T, \tag{П-2.15}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\mathbf{x}^{-1}\right)}{\partial \mathbf{x}} = -\left[\left(\mathbf{x}^{-1}\right)\left(\mathbf{x}^{-1}\right)\right]^T, \tag{П-2.16}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(\mathbf{Ax}^{-1}\mathbf{B}\right)}{\partial \mathbf{x}} = -\left(\mathbf{x}^{-1}\mathbf{BAx}^{-1}\right)^T. \tag{П-2.17}$$

Выражение для $\partial J/\partial \mathbf{x}$ можно упростить, используя лемму Клейнмана [8], которую коротко можно сформулировать следующим образом.

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — функция следа. Следовательно, если соотношение

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon\Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \varepsilon \operatorname{tr}\left[\mathbf{M}(\mathbf{x})\,\Delta\mathbf{x}\right] \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \tag{П-2.18}$$

выполняется (здесь $\mathbf{M}$ и $\mathbf{x}$ — матрицы размера $n \cdot m$ и $m \cdot n$ соответственно), то получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{M}^T(\mathbf{x}). \tag{П-2.19}$$

Используя лемму Клейнмана, можно последовательно доказать, что если $\partial J/\partial \mathbf{x}$ существует, то [10]

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \Delta J}{\partial \Delta \mathbf{x}} \quad \text{при} \quad J \to 0, \ \mathbf{x} \to 0. \tag{П-2.20}$$

Для доказательства уравнения (П-2.20) обозначим

$$\Delta J \triangleq \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{П-2.21}$$

Используя уравнения (П-2.18) и (П-2.19), получим

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \varepsilon \Delta J = \varepsilon \operatorname{tr}[\mathbf{M}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]. \tag{П-2.22}$$

Следовательно,

$$\Delta J = \operatorname{tr}[\mathbf{M}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]. \tag{П-2.23}$$

Наконец, учитывая, что $\mathbf{x}$ не зависит от $\Delta \mathbf{x}$ и рассматривая уравнение (П-2.6), получим при $\Delta J \to 0$, $\Delta \mathbf{x} \to 0$

$$\frac{\partial \Delta J}{\partial \Delta \mathbf{x}} = \mathbf{M}^T(\mathbf{x}), \tag{П-2.24}$$

что и требовалось доказать.

Приложение 3

Свойство интеграла уравнения $\mathbf{Ax}+\mathbf{xA}^T+\mathbf{C}=0$

Матричное уравнение

$$\mathbf{Ax}+\mathbf{xA}^T+\mathbf{C}=0, \qquad \text{(П-3.1)}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — квадратные матрицы, встречается в различных задачах идентификации, оптимизации и исследования устойчивости.

В том случае, когда все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ имеют отрицательную вещественную часть, уравнение (П-3.1) имеет единственное решение

$$\mathbf{x}=\int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{C}e^{\mathbf{A}^T t}\,dt. \qquad \text{(П-3.2)}$$

Это решение можно получить путем доказательства, что уравнение (П-3.2) удовлетворяет уравнению (П-3.1).

Пусть

$$\dot{\mathbf{U}}\overset{\Delta}{=}\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}, \qquad \text{(П-3.3)}$$

$$\mathbf{V}=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}^T t}. \qquad \text{(П-3.4)}$$

Тогда, используя (П-3.2), получим следующее выражение для $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$:

$$\mathbf{Ax}=\int_0^\infty \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{C}e^{\mathbf{A}^T t}\,dt. \qquad \text{(П-3.5)}$$

Подставляя выражения для $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$, $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}^T t}$ из (П-3.3) и (П-3.4) в (П-3.5), получим

$$\mathbf{Ax}=\int_0^\infty \dot{\mathbf{U}}\mathbf{V}dt. \qquad \text{(П-3.6)}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{UV}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty \mathbf{U}\dot{\mathbf{V}}dt. \qquad \text{(П-3.7)}$$

Однако из уравнений (П-3.3), (П-3.4) следует

$$\mathbf{U} = \int \dot{\mathbf{U}} dt = e^{\mathbf{A}t} + \mathbf{K}, \qquad \text{(П-3.8)}$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}^T t}\,\mathbf{A}^T. \qquad \text{(П-3.9)}$$

(Заметим, что когда рассматривается разложение $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$ в ряд Тейлора, не требуется обращения матрицы $\mathbf{A}$ при интегрировании $\dot{\mathbf{U}}$.) Подставляя выражения для $\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{V}}$ в уравнение (П-3.7), получим

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \underbrace{(e^{\mathbf{A}t} + \mathbf{K})}_{\mathbf{U}}\,\underbrace{\mathbf{C}e^{\mathbf{A}^T t}}_{\mathbf{V}}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{C}e^{\mathbf{A}^T t}\,dt\,\mathbf{A}^T - \mathbf{K}\mathbf{C}e^{\mathbf{A}^T t}\Big|_0^\infty. \qquad \text{(П-3.10)}$$

Член $e^{\mathbf{A}t}$ удовлетворяет следующему условию, исходя из требований к собственным значениям матрицы $\mathbf{A}$:

$$e^{\mathbf{A}\infty} = \mathbf{0}. \qquad \text{(П-3.11)}$$

В итоге, подставляя выражение для интеграла $\int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{C}e^{\mathbf{A}^T t}\,dt$ из уравнения (П-3.2), преобразуем уравнение (П.3.10) к виду

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{A}^T + \mathbf{C} = \mathbf{0}, \qquad \text{(П-3.12)}$$

что и требовалось доказать.

Приложение 4

Решения некоторых задач

Глава 2

3. Неуправляемая, $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{V}^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0.5\\ 0{,}5 & -0{,}5\end{bmatrix}$.

5. Ненаблюдаемая.

9. $G(s)=\dfrac{s+7}{s^2+2s-11}$.

Глава 3

2. $G(s)$ приближенно определяется как $\dfrac{1}{(s+1)(0{,}35s+1)}$.

3. $G(s)$ приближенно определяется в виде $\dfrac{10}{(16{,}4s+1)^4}$. Значение n аппроксимируется ближайшим целым (т. е. 4) согласно η и T_a/T_b или T_e/T_b из табл. 3.3. Затем на основании T_a/τ, T_b/τ, T_d/τ и τ_e/τ из табл. 3.4 получаются значения τ 16,8, 16,1, 16,0 и 16,7 соответственно.

Глава 4

1. Последовательность: 1, 13, 69, 97, 61, 93, 9, 17, 21, 73, 49, 37, 81, 53, 89, 57, 41, 33, 29, 77, 1, 13, ... Отметим, что 21-й элемент последовательности тождественно равен первому; с него последовательность повторяется.

4. $\varphi_{xx}(0)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1}x_jx_j=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N}(x_j)^2=1$, так как x_j равны 1 или -1, $\forall\, j$, N. Поэтому для последовательности НПМДО из 15 элементов получаем, что $\varphi_{xx}(0)=1$, $\varphi_{xx}(1)=-{}^1/_{15}$ и, таким образом, $\varphi_{xx}(k)=\pm{}^1/_{15}, \forall\, k=2, 3,..., 14$. Отметим, что последовательность НПМДО имеет вид $+1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, +1, -1$ и получается из последовательности НПМД с периодом 15, данной в разд. 4.2.2а, если все нули заменить на -1.

5. $+1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, +1$.

Глава 5

1. $y=29x_1+2{,}2x_2+0{,}5x_3$.

3. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2{,}6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$.

6. Подставляя $\xi=\cos\lambda$ в уравнение (5.72), получаем $\arccos\xi=\lambda$ и $T_\nu(\xi)=\cos(\nu\lambda)$. Следовательно, уравнение (5.73) приобретает вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos(\mu\lambda)\cos(\nu\lambda)}{\sqrt{1-\cos^2\lambda}}\,d\xi.$$

Однако $\sqrt{1-\cos^2\lambda}=\sin\lambda$ и $d\xi=d(\cos\lambda)=\sin\lambda d\lambda$, что дает

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos(\mu\lambda)\cos(\nu\lambda)}{\sqrt{1-\cos^2\lambda}}\,d(\cos\lambda)=\int_0^{\pi}\frac{\cos(\mu\lambda)\cos(\nu\lambda)}{\sin\lambda}\sin\lambda d\lambda=$$

$$=\int_0^{\pi}\cos(\mu\lambda)\cos(\nu\lambda)\,d\lambda=\left[\frac{\sin(\mu+\nu)\lambda}{2(\mu+\nu)}+\frac{\sin(\mu-\nu)}{2(\mu-\nu)}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при } \mu\neq\nu, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } \mu=\nu\neq 0, \\ \pi & \text{при } \mu=\nu=0. \end{cases}$$

10.

$$\frac{\partial S}{\partial b_k}=\frac{\partial}{\partial b_k}\left[\sum_j y(\xi_j)-b_0T_0(\xi_j)-b_1T_1(\xi_j)-\cdots-b_mT_m(\xi_j)\right]^2=$$

$$=\frac{\partial}{\partial b_k}\left[\sum_j b_k^2T_k^2(\xi_j)-2y(\xi_j)b_kT_k(\xi_j)\right]=0.$$

(Согласно свойству ортогональности, все суммы по всем другим членам равны нулю). Следовательно, равенство

$$2\sum_j b_k^2T_k^2(\xi_j)=2\sum_j y(\xi_j)b_kT_k(\xi_j)$$

дает

$$b_k^2\sum_j T_k^2(\xi_j)=b_k\sum_j y(\xi_j)T_k(\xi_j)$$

и

$$b_k=\frac{\sum_j y(\xi_j)T_k(\xi_j)}{\sum T_k^2(\xi_j)}.$$

Теперь, принимая во внимание уравнение (5.79), получаем искомые соотношения (5.81а), (5.81б).

11. $a=20$, $b=0{,}25$, $c=3$.

Глава 6

1. Для максимальной длины слова ЦВМ 10^{15} и для $1/\varepsilon=10$ получаем

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} 9{,}431 & -2{,}254 \\ -2{,}254 & 1{,}074 \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix} -0{,}6421 \\ 2{,}5426 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} 0{,}084 & 0{,}0865 \\ 0{,}0865 & 0{,}4876 \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix} -0{,}6209 \\ 2{,}8589 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{10}=\begin{bmatrix} 0{,}0109 & -0{,}0039 \\ -0{,}0039 & 0{,}0847 \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_{10}=\begin{bmatrix} -0{,}5982 \\ 0{,}2974 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{30}=\begin{bmatrix} 0{,}002 & -0{,}0005 \\ -0{,}0005 & 0{,}03 \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_{30}=\begin{bmatrix} -0{,}5997 \\ 2{,}991 \end{bmatrix}.$$

Для $1/\varepsilon=10^3$ получаем

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} 940{,}1 & -237{,}3 \\ -237{,}3 & 60{,}456 \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix} 0{,}6759 \\ 2{,}6763 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} 0{,}0850 & 0{,}0917 \\ 0{,}0917 & 0{,}5131 \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix} -0{,}6002 \\ 2{,}9985 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{10}=\begin{bmatrix} 0{,}011 & -0{,}0039 \\ -0{,}0039 & 0{,}0855 \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_{10}=\begin{bmatrix} -0{,}59998 \\ 2{,}9996 \end{bmatrix}.$$

Для $1/\varepsilon=10^{20}$ (больше максимального числа в ЦВМ) получаем

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} 9{,}4\cdot10^{19} & -2{,}37\cdot10^{19} \\ -2{,}37\cdot10^{19} & 6{,}0\cdot10^{19} \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix} -4{,}97\cdot10^{5} \\ -3{,}72\cdot10^{5} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} -5{,}24\cdot10^{5} & -2{,}62\cdot10^{5} \\ -2{,}62\cdot10^{5} & -6{,}55\cdot10^{4} \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix} 3{,}48\cdot10^{12} \\ -1{,}49\cdot10^{12} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{30}=\begin{bmatrix} +0{,}0025 & -0{,}0008 \\ -0{,}0008 & 0{,}0332 \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_{30}=\begin{bmatrix} 1{,}539\cdot10^{4} \\ 4{,}775\cdot10^{4} \end{bmatrix},$$

а действительный вектор $\mathbf{a}$ есть $\mathbf{a}=[-0{,}6,\ 3{,}0]^T$.

2. $\hat{\mathbf{a}}=[1{,}00002,\ 1{,}99995,\ 2{,}9994]$ в обоих случаях, а действительный вектор есть $[1,\ 2,\ 3]$. Однако для $1/\varepsilon=10^{20}$ (максимальное число в ЦВМ) получаем нелепый результат:

$$\hat{\mathbf{a}}=[-6{,}936\cdot10^{17},\quad 1{,}9816\cdot10^{18},\quad 3{,}27\cdot10^{18}].$$

Глава 7

2. $\alpha=0{,}5$ дает

$$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}1{,}8\\1{,}35\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{bmatrix}1{,}74\\1{,}23\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_4=\begin{bmatrix}1{,}90\\1{,}145\end{bmatrix}.$$

$\alpha=1{,}0$ дает

$$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}1{,}8\\1{,}35\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{bmatrix}1{,}68\\1{,}11\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_4=\begin{bmatrix}2{,}0\\0{,}94\end{bmatrix}.$$

$\alpha=1{,}5$ дает

$$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}1{,}8\\1{,}35\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_3=\begin{bmatrix}1{,}01\\1{,}01\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_4=\begin{bmatrix}0{,}755\\0{,}755\end{bmatrix},$$

а истинным вектором $\mathbf{P}$ является

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

Решение, приведенное выше, показывает, что при $\alpha\ll 1$ вектор $\mathbf{P}$ сходится, но медленно, тогда как при $\alpha\geqslant 1$ наблюдается тенденция к колебаниям.

4. $\mathbf{a}(t)=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ вплоть до десятого шага, а далее $\mathbf{a}(t)=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$.

Глава 8

1. Начиная с исходной оценки $\hat{a}_1=-0{,}12$ и принимая во внимание граничное (начальное) условие $x(0)=0$, получаем первую оценку $\hat{x}_1(t)$, $\forall\, t>0$ из уравнения

$$\dot{\hat{x}}_1(t)=-0{,}2\hat{x}_1(t)+u(t),$$

т. е.

$$\hat{x}_1(t)=1-\exp(-0{,}2t),\quad \forall t>0.$$

Определяя сопряженный вектор $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z}\stackrel{\Delta}{=}[x_1, a]^T,$$

получим, согласно уравнению (8.8),

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_\mu=\begin{bmatrix}\hat{a}\hat{x}+u\\0\end{bmatrix}_\mu,\quad \left.\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{z}}\right|_\mu=\begin{bmatrix}\hat{a} & \hat{x}\\0 & 0\end{bmatrix}_\mu$$

и, принимая во внимание уравнение (8.7),

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_{\mu+1}=\begin{bmatrix}\hat{a}_\mu\hat{x}_\mu+u\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{a}_\mu\hat{x}_{\mu+1}+\hat{a}_{\mu+1}\hat{x}_\mu-2\hat{a}_\mu\hat{x}_\mu\\0\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\hat{\mathbf{z}}_{\mu+1}(t) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}(t_1, t_0)\,\mathbf{z}_{\mu+1}(t_0) + \hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t),$$

где, согласно уравнению (8.13),

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}_{\mu+1}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \hat{a}_\mu & \hat{x}_\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{\mu+1}(t, t_0),$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(t_0, t_0) = \mathbf{I},$$

так что

$$\varphi_{21,\mu}(t, t_0) = 0, \quad \forall t, \mu,$$
$$\varphi_{22,\mu}(t, t_0) = 1, \quad \forall t, \mu.$$

Далее, уравнение (8.15) дает

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{\mu+1}(t) = \begin{bmatrix} \hat{a}_\mu \hat{x}_\mu(t) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a_\mu x_\mu(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_\mu & \hat{x}_\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t)$$

с $\hat{\mathbf{q}}_{\mu+1}(t_0) = 0$, так что $q_{2,\mu}(t) = 0, \forall \mu, t$, и

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{1,\mu+1}(t) = -\hat{a}_\mu \hat{x}_\mu(t) + \hat{a}_\mu \hat{\mathbf{q}}_{1,\mu+1}(t).$$

Теперь на основании значений $\hat{a}_1$, $\hat{x}_1(t)$, $\forall t$, можно определить $\hat{q}_{1,\mu+1}(t)$ при $\mu=1$ для всех t, что требуется для вычисления $\mathbf{z}_2(t_0)$ из уравнения (8.17), т. е.

$$x(0) = \hat{\varphi}_{11,2}(0, t_0)\,\hat{x}_2(t_0) + \hat{\varphi}_{12,2}(0, t_0)\,\hat{a}_2 + \hat{\mathbf{q}}_{1,2}(0),$$
$$x(1) = \hat{\varphi}_{11,2}(1, t_0)\,\hat{x}_2(t_0) + \hat{\varphi}_{12,2}(1, t_0)\,\hat{a}_2 + \hat{q}_{1,2}(1),$$
$$x(2) = \hat{\varphi}_{11,2}(2, t_0)\,\hat{x}_2(t_0) + \cdots.$$

При $t_0=0$ выражение для $x(1)$ преобразуется к виду

$$x(1) = \hat{\varphi}_{12,2}(1, 0)\,\hat{a}_2 + q_{1,2}(1).$$

Так как $\hat{\varphi}_2(1, 0)$, $\hat{q}_{1,2}(1)$ уже известны, а $x(1)$ задано, можно вычислить вторую оценку $\hat{a}_2$ для a. Продолжая таким же образом, окончательно получаем $\hat{a}=-0{,}1$.

3. Для $\hat{a}_1=-4$ или -3 решение сходится приблизительно

к -2, тогда как при $\hat{a}_1=-10$ сходимости нет.

Глава 9

1. Заметим, что $\dot{a}=\dot{b}=0$, и определим сопряженный вектор состояния $\mathrm{y}=(x, a, b)^{\mathrm{T}}$. Показатель качества J задается в виде

$$J \triangleq \int_0^{t_f} (x-\hat{x})^2\, dt.$$

Далее анализируя пример 9.1 из гл. 9, получаем, согласно уравнению (9.34),

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_2 \\ \dot{\hat{y}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} & \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{13} \\ \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{23} \\ \dot{Q}_{13} & \dot{Q}_{23} & \dot{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 2(z-\hat{y}_1+Q_{11}C_1+Q_{12}C_2+Q_{13}C_3)-C_1(\hat{y}_2-Q_{12}C_1-Q_{22}C_2-Q_{23}C_3) \\ -C_1(\hat{y}_1-Q_{11}C_1-Q_{12}C_2-Q_{13}C_3) \\ -C_1u \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\hat{y}_1-Q_{11}C_1-Q_{12}C_2-Q_{13}C_3)(\hat{y}_2-Q_{12}C_1-Q_{22}C_2-Q_{23}C_3)+ \\ +u(\hat{y}_3-Q_{13}C_1-Q_{23}C_2-Q_{33}C_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

что дает при $\mathbf{C}\simeq\mathbf{0}$

$$\dot{\hat{y}}_1-2Q_{11}(z-\hat{y}_1)=\hat{y}_1\hat{y}_2+u\hat{y}_3,$$

$$\dot{\hat{y}}_2-2Q_{12}(z-\hat{y}_1)=0,$$

$$\dot{\hat{y}}_3-2Q_{13}(z-\hat{y}_1)=0,$$

$$\dot{Q}_{11}=-2(Q_{11}^2-\hat{y}_2Q_{11}-\hat{y}_1Q_{12}-uQ_{13}),$$

$$\dot{Q}_{12}=-2(Q_{11}Q_{12}+\hat{y}_2Q_{12}+\hat{y}_1Q_{22}+uQ_{23}),$$

$$\dot{Q}_{22} = -2Q_{13}^2,$$
$$\dot{Q}_{13} = -2Q_{11}Q_{13} + \hat{y}_2 Q_{13} + \hat{y}_1 Q_{23} + uQ_{33},$$
$$\dot{Q}_{23} = -2Q_{12}Q_{13},$$
$$\dot{Q}_{33} = -2Q_{21}^2.$$

Отметим, что системы двух уравнений для $\dot{Q}_{12}$, $\dot{Q}_{13}$, $\dot{Q}_{23}$ определяются из уравнения (9.34). Однако каждое второе уравнение и любые последующие уравнения для систем более высокого порядка эквивалентны первому уравнению, так что противоречие не возникает.

Начальные условия для решения последних систем уравнений для $\dot{y}$, $\dot{\mathbf{Q}}$ выбраны в виде

$$\hat{y}_1(0) = z(0),$$
$$-\hat{y}_2(0) = y_3(0) = 1,$$
$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I},$$

что вытекает из условий задачи. При этом решение для $\hat{a}$, $\hat{b}$ принимает вид

t	0	0,5	2,0	3,0	4,0	5,0	10	15	17,1
$\hat{a}$	—1	—1,003	—1,067	—1,022	—0,9712	—0,9702	—0,8887	—0,8138	—0,7766
$\hat{b}$	1	0,9825	0,8363	0,8445	0,8412	0,8328	0,7921	0,7607	0,7391

а действительные значения a, b следующие: a=—0,5, b=0,5

2.

t	0	0,5	2,0	3,0	4,0	5,0	10	15	17,1
$\hat{a}$	—1,5	—1,508	—1,636	—1,579	—1,536	—1,543	—1,452	—1,314	—1,261
$\hat{b}$	1,5	1,467	1,236	1,247	1,245	1,217	1,164	1,117	1,087

Отметим, что сходимость к действительным значениям $\hat{a}$, $\hat{b}$ выполняется, хотя и медленнее по сравнению со случаем лучших начальных оценок задачи 1. (В экспериментах с более продол-

жительными записями измерений и с начальными оценками из задачи 1 оценки сходятся к $\hat{a}=-0{,}569$ и $\hat{b}=0{,}568$ при $t=80$, тогда как при начальных оценках данного случая имеем $a=-0{,}677$ и $b=0{,}668$ при $t=80$, а истинные значения $\hat{a}$, $\hat{b}$ равны $-0{,}5$ и $0{,}5$ соответственно.)

3. При $\mathbf{Q}(0)=0{,}2\mathbf{I}$

t	0	16,1
$\hat{a}$	—1	0,9620
$\hat{b}$	1	—0,8924

При $\mathbf{Q}(0)=5\mathbf{I}$

t	0	0,5	2,0	3,0	4,0	5,0	10	15	17,1
$\hat{a}$	—1	—1,009	—1,07	—0,8928	—0,7514	—0,7441	—0,6269	—0,5909	—0,5699
$\hat{b}$	1	0,944	0,7564	0,7348	0,6859	0,6744	0,604	0,5825	0,5660

Таким образом, оценка при $\mathbf{Q}=5\mathbf{I}$ сходится быстрее, чем при $\mathbf{Q}=\mathbf{I}$ (сравните с решением задачи 1).

Для $\mathbf{Q}(0)=10\mathbf{I}$

t	0	0,2	0,3	0,4
$\hat{a}$	—1	—1,009	—541,2	$-5{,}496\cdot10^{37}$
$\hat{b}$	1	0,8833	—4432	$-4{,}453\cdot10^{38}$

Четыре различных варианта выбора $\mathbf{Q}(0)$, так же как в задачах 1 и 3, показывают важность правильного выбора $\mathbf{Q}(0)$. Наилучшим вариантом выбора является $\mathbf{Q}(0)=5\mathbf{I}$. При малых значениях $\mathbf{Q}(0)$ сходимость медленная, а при слишком больших значениях $\mathbf{Q}(0)$ возникает расходимость.

Глава 10

1. Реакция почти совпадает с траекторией цели, за исключением небольшого отклонения в интервале от $t=0$ до $t=2$ и непосредственно после 50%-ного возмущения параметра при $t=9$:

t	0	1	2	3	4	6	8	9	10	11	12	13	14	16	18	20
x_1	0	0,2	0,79	1,07	1,13	1,01	0,97	0,99	0,97	0,93	0,97	0,95	0,95	0,96	0,97	0,99
x_d	0	0,4	0,7	1,07	1,14	1,02	0,98	0,99	1,0	1,01	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

3.

$$\sigma_x \cong \begin{bmatrix} 3,6 & 0,2 \\ -8,4 & -1,5 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_y \cong \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_{xd} \cong \begin{bmatrix} 8,2 & 0 \\ 0 & 18,2 \end{bmatrix}.$$

Глава 11

1. $$\mu = \frac{\lg 0,02}{\lg 0,9} = 35.$$

То есть 35 выбранных наугад ячеек должны быть проверены.

3. $$p(\mu) = \sum_{i=1}^{\mu} \binom{w}{i}\binom{r-w}{\mu-i} \Big/ \binom{r}{\mu}, \quad \binom{x}{y} = \frac{x!}{y!\,(x-y)!}.$$

4. $$a \cong -3, \quad b \cong 0,5.$$

Глава 12

1. Прогнозируемые значения $y(t+\theta)$ указаны ниже, где $y^*(t+\theta)$ обозначает результаты, получаемые из процедуры разд. 12.3, а $y'(t+\theta)$ — результаты, получаемые с помощью экстраполяции разложением в ряд Тейлора:

$(t+\theta)$	18	19	20	21	22	23	24
$y^*(t+\theta)$	0,8521	0,6044	0,0677	1,03781	1,3812	1,0641	0,3524
$y'(t+\theta)$	0,8065	0,2695	−0,0948	1,2317	1,8635	0,9957	0,2444
$(t+\theta)$	25	26	27	28	29	30	31
$y^*(t+\theta)$	0,1251	1,406	1,7477	0,7274	−0,3289	0,7769	1,4873
$y'(t+\theta)$	−0,1621	1,1944	1,7210	1,6031	−0,2859	−0,1367	1,3024
$(t+\theta)$	32	33	34	35	36	37	38
$y^*(t+\theta)$	1,7263	1,0718	0,0551	0,5234	0,9566	1,0268	0,0876
$y'(t+\theta)$	2,5384	1,4392	−0,208	−0,3229	0,9853	1,6925	0,4348

$(t+\theta)$	39	40	41	42	43	44	45
$y^*(t+\theta)$	0,3266	0,8311	0,0145	0,5907	0,6178	0,9005	0,1256
$y'(t+\theta)$	—0,1654	0,5436	0,0987	0,8841	0,7354	0,6141	0,1586

$(t+\theta)$	46	47	48	49	50	51	52
$y^*(t+\theta)$	0,3149	—0,8525	—0,1151	—0,5862	0,3561	0,5252	0,2366
$y'(t+\theta)$	0,3501	—0,7627	—0,4895	—0,4079	0,6273	0,4422	0,3414

$(t+\theta)$	53	54
$y^*(t+\theta)$	—0,5345	—1,4273
$y'(t+\theta)$	—0,6741	—1,5363

Отметим, что значения y^* близки к измеренным действительным значениям y в 25 из 37 случаев. Среднеквадратичная ошибка прогноза для y^* приблизительно на 10% меньше, чем для y', а действительный y описывается синусоидой.

2. После 17 итераций получается следующая модель:

$$y(k) = \varphi_1 y(k-1) + \varphi_2 y(k-2) + \theta_1 a(k) + \theta_2 a(k-1),$$

где $a(k)$ — некоррелированная последовательность с нулевым средним и $E[a^2(k)]=1$, $\hat{\varphi}_1=0{,}9450$, $\hat{\varphi}_2=-0{,}4555$, $\hat{\theta}_1=1{,}006$, $\hat{\theta}_2=0{,}2996$, а действительные значения равны: $\varphi_1=0{,}955$, $\varphi_2=-0{,}456$, $\theta_1=1$, $\theta_2=0{,}3$.

Глава 13

1. Подставляя идентифицированные матрицы **A**, **B** из данной задачи в уравнение (13.35), получим

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^*_{11} & S^*_{12} \\ S^*_{12} & S^*_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S^*_{11} & S^*_{12} \\ S^*_{12} & S^*_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \mathbf{I} - \begin{bmatrix} (S^*_{12})^2 & S^*_{12}S^*_{22} \\ S^*_{12}S^*_{22} & (S^*_{22})^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

так что

$$1 - (S^*_{12})^2 + 2S^*_{12} = 0, \quad S^*_{12} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Так как при $S^*=-1-\sqrt{2}$ имеем неустойчивую замкнутую систему, то получаем $S_{12}=-1+\sqrt{2}=0{,}414$. Уравнение (13.35)

дает $1-2S_{12}^* -2S_{22}^* - (S_{22}^*)^2=0$. Следовательно, при $S_{12}=0{,}414$ получаем $S_{22}^* = (-2\pm 2{,}16)/0{,}172$. Во избежание неустойчивости замкнутой системы необходимо выбрать $S_{22}^*=(-2+2{,}16)/0{,}172=0{,}9$. Подобным же образом определяется третье выражение из уравнения (13.35), т. е. при $S_{11}^* - S_{12}^* - S_{22}^* - S_{12}^* S_{22}^* = 0$ получаем $S_{11}^* = 1{,}69$, так что

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} 1{,}69 & 0{,}414 \\ 0{,}414 & 0{,}9 \end{bmatrix}.$$

Далее, согласно уравнению (13.34), выражение для матрицы $\mathbf{F}^*$ имеет вид

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}^* = [0,\ 1]\begin{bmatrix} 1{,}69 & 0{,}414 \\ 0{,}414 & 0{,}9 \end{bmatrix} = [0{,}414,\ 0{,}9],$$

откуда получаем

$$\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}414 & 0{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1{,}414 & -1{,}9 \end{bmatrix}.$$

Окончательно матрица $\boldsymbol{\Gamma}$ определяется из уравнения (13.28) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1{,}414 \\ 1 & -1{,}9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1{,}414 & -1{,}9 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 3{,}38 & 0{,}828 \\ 0{,}828 & 1{,}8 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Перейдем от матричного уравнения к системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными Γ_{11}, Γ_{12}, Γ_{22}, т. е.

$$-2{,}828\Gamma_{12} + 1 = 0,$$
$$2\Gamma_{12} - 3{,}8\Gamma_{22} + 1 = 0,$$
$$-1{,}414\Gamma_{22} + \Gamma_{11} - 1{,}9\Gamma_{12} = 0,$$

тогда $\Gamma_{12}=0{,}341$, $\Gamma_{22}=0{,}445$, $\Gamma_{11}=2{,}3$ и

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 4{,}02 & 0{,}77 \\ 1{,}26 & 0{,}54 \end{bmatrix}.$$

3. Повторяя процедуру определения $\mathbf{S}$, $\mathbf{F}$ в задаче 1, будем иметь при оптимуме

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} 1{,}69 & 0{,}414 \\ 0{,}414 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^* = [0{,}414,\ 0{,}9]$$

и

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1{,}414 & -1{,}9 \end{bmatrix}.$$

Затем для $\Delta\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}1\end{bmatrix}$, $\Delta\mathbf{F}=[0{,}029,\ 0{,}063]$ находим матричное уравнение

$$\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\omega}+2\mathbf{X}_0-4\mathbf{B}\Delta\mathbf{F}\boldsymbol{\Gamma}-4\boldsymbol{\Gamma}\Delta\mathbf{F}^T\mathbf{B}^T=\mathbf{0},$$

из которого получаем три линейных уравнения для вычисления трех неизвестных λ_{11}, λ_{12}, λ_{22}. Окончательно с помощью уравнения (13.50) определяем

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{A}}=\mathbf{S}^*\boldsymbol{\lambda}.$$

Предметный указатель

Автокорреляционная функция 88, 217, 249, 250
Авторегрессионная модель скользящего среднего 113, 118, 234—252, 271
— — — — порядок 239, 240
— — — — с бесконечным числом параметров 237
Адаптивное управление 19
Амплитудно-частотная характеристика 57—65, 80, 102
Апериодическая система 53
— функция 70—77
Аппроксимация кривой 124, 191, 221—225
— — полиномами Чебышева 121, 122, 191, 220
— — ступенчатая 157
Аргумент (фаза) 58

Биномиальное разложение 209
Быстрое преобразование Фурье 54, 67, 98—100

Вероятность 114, 117, 207—210, 216
— плотность распределения 207, 243, 244, *см. также* Плотность распределения вероятностей
— — — маргинальная 243
— — — равномерная 244
Весовая матрица 118, 177, 190
Весовой коэффициент 123, 124, 134
Время затухания 204
— нарастания 65
Вход, восстановление 242, 244, 272
— детерминированный 111, 113
— измеряемый 177
— неизмеряемый 11, 114, 235

Гамильтониан 178, 182
Гауссовское распределение (последовательность) 117, 118, 126, 223—247, 254
— — белый шум 116, 118, 228, 235, 238
— — плотность распределения вероятностей 117, 243, 246
— — совместное 117, 219, 244
Генератор случайных чисел 91
Гиперсфера 212
Градиент 19, 199, 204, 210—215, 277
— затрат 200
Градиентная оптимизация 199, 210
— функция 145
Градиентное управление с прогнозом 196—201
Градиентный поиск 144, 204—206
— — последовательный 144
— — случайный 204—210
— — эвристический 210—216
Графическая идентификация переходной и импульсной переходной функций 70—77, 80—85

Дельта-функция 77, 79, 89
Демпфирования коэффициент 74
Диагонализация 28, 33, 38, 51
Дискретизация 42
Дисперсия 116, 126, 236, 243—245
— минимальная 116, 117
Дифференциальные уравнения в частных производных 22
— — нелинейные 167, 182, 183
Дуальность 30

Жорданов блок 33, 34

Завышение порядка 238
Запаздывание чисто временно́е 71
Затраты 136, 177
— величина 258
— на управление 190, 215
— оптимальные 258, 264—269
— поверхность 208
— разность 258
— расчетные 258—260
— функционал 287

Идентификация в реальном времени 86, 103, 104, 187, 270
— ошибки 153—155, 257
— показатель качества 145, 212
— с помощью входного сигнала 53, 86, 154
— состоятельная 115, 116, 238, 240, 252
— эвристическая 203—205
— эффективная 118, 240, 270
Импульс конечной ширины 77, 79
— нулевой ширины 77
Импульсная переходная функция 78, 80, 81
— — — системы второго порядка 82, 83
— — — — первого порядка 81, 82
Инвариантное погружение 176—186, 218, 271
Интегрируемая функция 53, 69
Итерационная оценка параметра 134, 151, 155, 158
— — порядка (размерности) 113, 177, 241

Каноническая форма 29, 31, 33
— — Жордана 33, 34
Каноническое преобразование 24, 25, 28—30
Квадратическая остаточная последовательность (код) 96, 102
Квазилинеаризация 104, 149, 167—177
Квазистационарность 103, 194, 198
Корреляционная функция 55, 86—101
— — взаимная 87—89, 219
Коэффициент коррекции ошибки 153—160
Краевая задача двухточечная 176, 179, 184
— — многоточечная 167
— — нелинейная 167
— — одноточечная 176

Лагранжа множитель 199, 212
Лагранжиан 199
Лемма об обращении матрицы 138
Линеаризация 218, 259, 268, 275

Маргинальное распределение 243
Марковская оценка 117
Матрица Вандермонда 27
— верхняя диагональная (треугольная) 34
— весовая 118, 177, 190, 260
— вырожденная (особая) 40, 137
— диагонализированная 39
— диагональная 28, 39, 40
— дифференцирование 195, 262
— — следа 228, 277
— коагулированная форма 27, 43, 46—48
— ковариаций ошибок 225
— коэффициентов обратной связи 228, 261
— лемма об обращении 138
— *нижняя треугольная* 43
— обращение 104, 133
— плотности распределения ошибок 230
— положительно-определенная 190, 195
— ранг 37
— след 106, 228, 261
— собственные векторы 26, 28
Матричное уравнение Риккати 263
Метод Грама—Шмидта 220
— квазилинеаризации 167
— крутого спуска 210, *см. также* Поиск градиентный
— Ньютона 144
Методы обучения 149, 187, 242
— — последовательные 147, 149—166, 270, 271
Многомерная регрессия *см.* Регрессия
Многомерные ортогональные полиномы 125
Многомодальность (кратная модальность) 207, 213
Модель бесконечно большой размерности 237

Наблюдаемая система 37—41
Наблюдаемость 30, 37—41
— критерий 37—41, 51
Некоррелированная последовательность (шум) 114—116, 235, 251
Ненаблюдаемая система 38—40, 41
Несмещенная оценка 118, 243, 272
Нестационарная система (процесс) 133, 149, 155, 158, 163, 198

Неуправляемое состояние (система) 36, 282
Неустойчивая система 36, 59, 149, 271, 291
Нули 235
Нуль-последовательность (максимальной длины) 93

Обращаемость 114, 235, 252
Ограничение 212
Ограниченное пространство 205, 206
Оператор вычитания 250
— запаздывания 248
— преобразования Лапласа 235
— сдвига 42, 112, 235
Определитель 23
Оптимальное управление 257, 260, 265
— — градиентное с прогнозом 199
— — затраты 258, 259, 267, 269
— — матрица обратной связи 227, 261—265
— — показатель качества 257, 260—269
— — с обратной связью 257
— — стратегия 257
— — чувствительность к характеристикам 257, 260—269
Ортогональность 122—124, 132, 282
Оценивание совместное состояния и параметров 177, 217, 218, 252, 271
Оцениватель (фильтр) Мейна 229—231, 272
Оценка дисперсии шума измерений 252
— максимального правдоподобия 118, 270
— марковская 117
— матрица ковариаций ошибок 227
— начальная 139, 147, 170, 228, 289
— ограниченная 139
— оптимальная *см.* Прогнозирование оптимальное
— по методу наименьших квадратов 118, 119, 222
— полиномиальная 220—222, 228
— с минимальной дисперсией 117
— с обратной связью 226, 228, 254
— фильтра Калмана 229, 233, *см. также* Предсказатель калмановский
Ошибка идентификации 153, 157, 257
— — коэффициент коррекции 153—155, 157
— — — — — оптимальный 155
— — — усиления 242
— — матрица ковариаций 225
— — — плотности 230
— прогноза 116, 242, 256
Периодическая нестационарность 249
Плотность распределения вероятностей *см.* Вероятность, плотность распределения
Псевдослучайная последовательность 98
Поиск градиентный 203, 210—213
— случайный 203, 207, 213, 214
Показатель качества 214
— — оптимальный 257
— — отображение 213
— — управления 67
— — чувствительность 257—269
Полиномы Чебышева 119—125, 132, 220
Порядок авторегрессионной модели скользящего среднего 240, 241, 273
— выражений конечный 237
— — минимальный адекватный 238
— модели 113, 134
— полинома 35, 93
— разности 248, 249
— чистой авторегрессионной модели 241, 242, 252
Последовательное обучение 149—166, 270, 271
— распознавание образов 161—164
Постоянная времени 62, 71, 75
Предельная точность 156, 157
Предсказатель 216—256, 272, 273
— калмановский 216, 223, 242, 273, *см. также* Фильтр Калшана
— линейный оптимальный 218, 234, 243, 244
— нелинейный 218, 256
Преобразование в пространстве состояний 42, 49, 251, 272
— к форме фильтра Калмана 242
— каноническое 24
— Лапласа 54, 66
— Фурье 54, 67, 98—100
— — обратное 53
Прогнозирование 114, 187, 217, 242, 251, 271
— градиентный метод 196
— линейное 187
— оптимальное 243—245

Разложение в ряд Тейлора 168, 191, 221
— полиномиальное 30

Размерность 35, 177
— вектора параметров 225
— — состояния 271
Разностное уравнение 22
Распознавание образов 161
— — последовательное 161—164
Распределение гауссовское *см.* Гауссовское распределение
— маргинальное 244
— негауссовское 218, 240, 242—247
— равномерное 244
— совместное 219, 244
Расходимость 176
Расширенный фильтр Калмана *см.* Фильтр Калмана расширенный
Регрессия 114, 120, 128, 238
— многомерная 193
— нелинейная 118, 142, 198
— последовательная 133, 141
Регистр сдвига 92, 95
Ряд Вольтерра 120

Свертки интеграл 69, 86, 98, 150, 161
Сглаживание 218, 220
Система линейная 109, 133, 142, 272
— нелинейная 133
— нестационарная 155, 158
— стационарная 111, 133, 173
След матрицы 227, 277
Случайная поверхность затрат 208
Случайные вариации параметров 155
Смешанная авторегрессионная модель скользящего среднего 113, 114, 234, 251, 272
Собственная частота 74, 83
Собственные значения 23—34, 51, 261, 280
— — одинаковые 30—33
— — различные 25, 27, 29, 33, 38
Собственный вектор 24—28
— — матрица 24, 27, 38, 40
Совместное оценивание состояния и параметров 217, 218, 252—255, 271
Совокупность измерений 110
Сопряженный вектор 285, 287
Состояние 11
— вектор 16, 17, 110, 177, 198, 215, 219
Среднее значение нестационарное 219, 220, 248
— — случайно изменяющееся 219
Стационарность 133, 194, 198, 199, 248
— параметров 168, 198, 202
— последовательности 248
— процесса 52, 133, 168, 196, 249
— системы 66, 159
Сходимость 144, 149, 151, 181, 207, 208, 231, 237, 270
— геометрическая интерпретация 151
— область 167
— процедуры поиска 207
Сходящаяся функция (последовательность) 207, 237
Теорема Вейерштрасса 119, 162
— Дворецкого 144, 145
— Клейнмана 262, 263, 278
— Кэли—Гамильтона 35
— Ляпунова 190
— о конечном значении 74
— Сильвестра 35
Траектория 187, 191, 289
Транспонирование матрицы 275

Управление адекватное 191, 193
— градиентный метод 196—201
— затраты 211, 215
— импульс 190
— интервал 192, 193, 198, 214
— линейное 260, 264
— оптимальное 196, 199, 265
— — качество 196
— — — показатель 196, 197, 200, 210, 212
— с обратной связью 257, 260
— с прогнозом 186—196, 211, 213, 214
— стратегия 257, 264, 267
— — оптимальная 257
— субоптимальное 200
Управляемость 30—37
— критерий 30—37, 51
— — Гильберта 30—32, 51
— — Калмана 34—36, 51
— по выходу 37
— по состоянию 37
— теорема 31
Устойчивость 36, 195, 197
— анализ 36, 280
— теорема Ляпунова 190
Условие трансверсальности 179

Фазовая частотная характеристика 59, 62—64
Фильтр Винера 234, 237, 273
— Калмана 217, 219, 224, 229, 233, 242, 251
— — линейный оптимальный 229, 243
— — оптимальный 219, 244, 253
— — предсказатель 223, 229, 271—273
— — расширенный 218, 242, 253, 272
Фильтрация 217, 218, 272

Функция передаточная 42, 57, 111
— правдоподобия 116, 117
— — максимум 118

Характеристическое уравнение 34

Частное решение 169, 174
Частотная характеристика 52—65, 98—101
Чувствительность 257—269
— матрица 257, 264, 268, 269
— оптимум 259, 262, 265—267
— параметров 257—260
— показателя качества 257
— расчетная 261
— характеристик 258, 260

Шум 14, 15, 53, 218—224, 270—274
— белый 86, 89, 224, 228, 229, 251
— — бинарный 91
— — гауссовский 114, 188, 219, 224, 228, 238, 270
— — дискретный 252
— — квазистационарный 220
— — негауссовский 220, 223, 243, 245, 246, 272
— — равномерный 243

Экстраполяция разложением в ряд Тейлора 173, 222—224, 228, 256

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА 5

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ 8

ПРЕДИСЛОВИЕ 9

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ 11

1.1. Основные определения и классификация 11
1.2. Математический аппарат 18
1.3. Комментарии к библиографии 19
Литература 20

Глава 2. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ, УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ 22

2.1. Понятие пространства состояний 22
2.2. Линейные преобразования 22
2.3. Управляемость 30
2.4. Наблюдаемость 37
2.5. Связь между представлением в пространстве состояний и представлением с помощью передаточных функций 42
Литература 50
Задачи 51

Глава 3. МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ С ПОМОЩЬЮ СИНУСОИДАЛЬНЫХ, СТУПЕНЧАТЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ 52

3.1. Методы идентификации, основанные на преобразовании Фурье 52
3.2. Идентификация с помощью частотной характеристики . . . 57
3.3. Идентификация с помощью переходной функции 65
3.4. Идентификация с помощью импульсной переходной функции 77
Литература 83
Задачи 84

Глава 4. МЕТОДЫ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ 86

4.1. Интегралы свертки и корреляции 86
4.2. Генерация случайных и псевдослучайных последовательностей 91
4.3. Получение частотных характеристик на основе корреляционных функций 98
4.4. Вычислительные аспекты 99
Литература 101
Задачи 101

Глава 5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕГРЕССИОННЫХ МЕТОДОВ 103

5.1. Статическая задача для системы с одним выходом 104
5.2. Статическая задача для системы с несколькими входами и несколькими выходами 107
5.3. Регрессионная идентификация линейных динамических процессов 109
5.4. Построение моделей систем с помощью передаточных функций 111
5.5. Идентификация по критерию минимума дисперсии и функция правдоподобия 116
5.6. Регрессионная идентификация нелинейных процессов . . . 118
Литература 129
Задачи 129

Глава 6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ РЕГРЕССИОННЫЕ МЕТОДЫ . 133

6.1. Скалярный случай 134
6.2. Многомерный случай 136
6.3. Последовательная нелинейная регрессия 141
Литература 142
Задачи 142

Глава 7. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДАМИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ 144

7.1. Использование метода стохастической аппроксимации для идентификации 144
7.2. Идентификация методом обучения 149
7.3. Последовательная процедура распознавания образов для идентификации нелинейных систем 161
Литература 165
Задачи 165

Глава 8. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ 167

8.1. Идентификация непрерывных систем методом квазилинеаризации 168
8.2. Идентификация дискретных систем методом квазилинеаризации 172
Литература 174
Задачи 174

Глава 9. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ 176

9.1. Постановка задачи идентификации методом инвариантного погружения 177
9.2. Решение задачи идентификации непрерывной системы методом инвариантного погружения 179
9.3. Идентификация дискретных систем методом инвариантного погружения 184
Литература 184
Задачи 185

Глава 10. ИДЕНТИФИКАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГНОЗА И ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ . . 187

10.1. Идентификация и управление с использованием прогноза . 187
10.2. Идентификация и управление на основе градиентного метода с прогнозом 196
Литература 201
Задачи 201

Глава 11. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ . . . 203

11.1. Процедура случайного поиска для идентификации динамических систем 204
11.2. Идентификация на основе эвристического прямого поиска . 210
11.3. Использование процедуры эвристической идентификации для схем с прогнозом 213
Литература 216
Задачи 216

Глава 12. МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПРЕДСКАЗАТЕЛЯ 217

12.1. Сглаживание априорно неизвестных последовательностей с помощью полиномиальной аппроксимации 218
12.2. Экстраполяция разложением в ряд Тейлора сигналов, аппроксимированных полиномами 221
12.3. Использование последовательных коррекций, основанных на методе калмановской фильтрации, в экстраполяции 226
12.4. Определение параметров предсказателя при изменении параметров состояния в фильтре Калмана 229
12.5. Использование калмановского предсказателя для последовательностей с известными параметрами 233
12.6. Идентификация смешанных авторегрессионных моделей скользящего среднего для предсказателя 234
12.7. Смешанные авторегрессионные модели скользящего среднего нестационарных последовательностей и систем 247
12.8. Построение моделей фильтра Калмана по параметрам авторегрессионной модели скользящего среднего 251
12.9. Совместное оценивание состояния и параметров с помощью расширенного фильтра Калмана 252
Литература 255
Задачи 255

Глава 13. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК К ОШИБКАМ ИДЕНТИФИКАЦИИ 257

13.1. Определение чувствительности параметров 257
13.2. Вычисление матриц чувствительности расчетных характеристик 260
13.3. Вычисление матриц чувствительности для оптимального показателя качества 265
13.4. Экспериментальное определение матриц чувствительности . 268
Литература 269
Задачи 269

Глава 14. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ 271

Приложение 1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ . . 275

Приложение 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛЕДА МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ 277

Приложение 3. СВОЙСТВО ИНТЕГРАЛА УРАВНЕНИЯ $Ax+xA^T+C=0$ 280

Приложение 4. РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ 282

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 294

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-Рижский пер., 2, издательство «Мир».

Д. Гроп
МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ

Ст. научный редактор Ю. Б. Воронов
Мл. научный редактор Е. П. Орлова
Художник Е. К. Самойлов
Художественный редактор Л. Е. Безрученков
Технический редактор Т. А. Максимова
Корректор В. С. Соколов

ИБ № 1704

Сдано в набор 25.08.78. Подписано к печати 06.12.78. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 9,50 бум. л. Усл. печ. л. 19. Уч.-изд. л. 15,80. Изд. № 20/9620. Тираж 10 тыс. экз. Зак. № 674. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Мир», Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Владимирская типография «Союзполиграфпрома»
при Государственном комитете СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7